به جمع اعضای خانواده بزرگ DLM خوش آمدید.

توجه۱: هر فلش‌کارت بر روی دو صفحه A4 قرار داده شده است. صفحات فرد، روی فلش‌کارت‌ها (صورت) و صفحات زوج، پشت فلش‌کارت‌ها (پاسخ) هستند.

بنابراین در هنگام گرفتن پرینت، دستور پرینت را باید طوری تعریف کنید که اعداد هر فلش‌کارت نظیر به نظیر پشت یکدیگر بیفتند.

(۱ پشت ۱، ۲ پشت ۲، ۳ پشت ۳ الی آخر)

توجه ۲: پس از گرفتن پرینت می‌توانید قسمت‌های اضافی A4 را که سفید هستند جدا کنید. سایز واقعی فلش‌کارت‌ها به اندازه مستطیل وسط صفحه است که در آن مطالب نوشته شده‌اند.(۸ ×۱۴/۵ سانتیمتر)

در پک «تحقیق در عملیات» علاوه بر فلش‌کارت‌ها، یک کتابچه حل تمرین با قطع رحلی (A4) در اختیار شما عزیزان قرار گرفته و برخی از تمرین‌ها و مطالب (نظیر سیمپلکس‌ها) درون آن آموزش داده شده اند تا بتوانید مراحل مختلف حل را **یکجا و در یک صفحه**، همزمان ببینید (نه به صورت منقطع و در چند فلش‌کارت) و بتوانید ارتباط بین مراحل مختلف حل را (از لحاظ حافظه تصویری و طبقه‌بندی مطالب در ذهن) به‌طور کامل و دقیق درک کنید. این کتابچه در انتهای همین فایل قرار دارد.

در این سمپل (برخلاف همیشه که یک سرفصل از پک‌ها تقدیم می‌شود) **دو سرفصل اصلی OR در اختیار شما قرار داده شده است** تا بتوانید کیفیت و عیار پک را به‌خوبی تشخیص دهید. (پک کامل شامل ۱۴ سرفصل می‌باشد.)

توجه ۳: اگر حوصله دانلود،پرینت و برش فلش‌کارت‌ها را ندارید به دفتر پخش انتشارات واقع در خیابان جمهوری،خیابان گلشن، کوچه آزاد، پلاک ۲ مراجعه فرمایید تا حاضر و آماده و **به شکل رایگان** به شما تقدیم شود.

می‌توانیم از طریق پست (برای شهرستانها) و از طریق پیک بادپا (برای تهران) سمپل رایگان را برای شما ارسال کنیم. بدین منظور با شماره تلفن ۰۲۱-۶۶۹۰۳۵۴۷ تماس حاصل فرمایید.

توجه ٤: دستورالعمل و همچنین جدول زمان‌بندی مطالعه نیز در ابتدای همین فایل قرار دارد. خودِ همین برنامه‌ریزی ناخودآگاهی که به واسطه بهره‌مندی از تکنیک DLM ایجاد می‌شود، نقش موثر و مهمی در موفقیت شما عزیزان دارد.

ما به موفقیت تک‌تک شما حساسیم.

بااحتـــــــرام

انتشارات تبلور دانش- گروهDLM

لطفا اشتباه نشود.

سمپل رایگان، اشانتیون نیست. احترام به «حق انتخاب» شماست.

این حق شماست که فارغ از هیاهوهای تبلیغاتی ابتدا با پک ها آشنا شوید و سپس تصمیم گیری کنید.

تقدیمِ سمپل رایگان احترام به حق انتخاب شماست.

بدیهی است نمونه هایی که در اختیار شماعزیزان قرار گرفته دقیقا همانی است که در پک کامل وجود دارد.

این وظیفه ماست که برای سرمایه شما حرمت قائل باشیم و مهم تر از هزینه ای که برای تهیه منابع آزمون کارشناسی ارشد می کنید، وقتی است که در مهم ترین سال ها و لحظه های جوانی برای مطالعه و آمادگی در آزمون کارشناسی ارشد اختصاص می دهید.

نهایت تلاش خود را بخرج می دهیم که پک ها جامع باشند و مطلبی جا نیفتاده باشد و سئوالی خارج از پکها در کنکور مطرح نشود.

این، رویکرد DLM است که یا پکی را ارائه نکنیم یا پک قدرتمند و متفاوتی را ارائه نماییم که شما را از کتاب و کلاس بی نیاز کند.

با امید به اینکه بتوانیم نقشی در موفقیت شما داوطلب گرامی ایفا نماییم.

بااحترام

DLMgroup

جدول زمان‌بندی و دستورالعمل مطالعه پک «تحقیق در عملیات»

www.DLMgroup.ir

مرور نهایی	مرور چهارم	مرور سوم	مرور دوم	مرور اول	تعداد فلش‌کارت	سرفصلِ	تا	از	روز
-	-	-	-	-	۲۷	اول	۲۸	۱	۱
-	-	-	-	۱-۲۸	۵۱		۸۰	۲۹	۲
-	-	-	-	۲۹-۸۰	۶۲		۱۴۳	۸۱	۳
-	-	-	۱-۲۸	۸۱-۱۴۳	۵۳	دوم	۱۹۷	۱۴۴	۴
-	-	-	۲۹-۸۰	۱۴۴-۱۹۷	۱		۱۹۸	۱۹۸	۵
-	-	-	۸۱-۱۴۳	۱۹۸-۱۹۸	۲۲		۲۲۱	۱۹۹	۶
-	-	-	۱۴۴-۱۹۷	۱۹۹-۲۲۱	۴۳		۲۶۵	۲۲۲	۷
-	-	-	۱۹۸-۱۹۸	۲۲۲-۲۶۵	۳۸	سوم	۳۰۴	۲۶۶	۸
-	-	۱-۲۸	۱۹۹-۲۲۱	۲۶۶-۳۰۴	۳۷		۳۴۲	۳۰۵	۹
-	-	۲۹-۸۰	۲۲۲-۲۶۵	۳۰۵ -۳۴۲	۴۰		۳۸۳	۳۴۳	۱۰
-	-	۸۱-۱۴۳	۲۶۶-۳۰۴	۳۴۳ – ۳۸۳	۵۶		۴۴۰	۳۸۴	۱۱
-	-	۱۴۴-۱۹۷	۳۰۵ -۳۴۲	۳۸۴ – ۴۴۰	۴۰		۴۸۱	۴۴۱	۱۲
-	-	۱۹۸-۱۹۸	۳۴۳ – ۳۸۳	۴۴۱ – ۴۸۱	۴۵		۵۲۷	۴۸۲	۱۳
-	-	۱۹۹-۲۲۱	۳۸۴ – ۴۴۰	۴۸۲ – ۵۲۷	۲۳		۵۵۱	۵۲۸	۱۴
-	-	۲۲۲-۲۶۵	۴۴۱ – ۴۸۱	۵۲۸ - ۵۵۱	۳۳	چهارم	۵۸۵	۵۵۲	۱۵
-	۱-۲۸	۲۶۶-۳۰۴	۴۸۲ – ۵۲۷	۵۵۲ – ۵۸۵	۴۸		۶۳۴	۵۸۶	۱۶
-	۲۹-۸۰	۳۰۵ -۳۴۲	۵۲۸ - ۵۵۱	۵۸۶ – ۶۳۴	۲۲		۶۵۷	۶۳۵	۱۷
-	۸۱-۱۴۳	۳۴۳ – ۳۸۳	۵۵۲ – ۵۸۵	۶۳۵ – ۶۵۷	۲۸		۶۸۶	۶۵۸	۱۸
-	۱۴۴-۱۹۷	۳۸۴ – ۴۴۰	۵۸۶ – ۶۳۴	۶۵۸ – ۶۸۶	۱۷		۷۰۴	۶۸۷	۱۹
-	۱۹۸-۱۹۸	۴۴۱ – ۴۸۱	۶۳۵ – ۶۵۷	۶۸۷ – ۷۰۴	۴۹		۷۵۴	۷۰۵	۲۰
-	۱۹۹-۲۲۱	۴۸۲ – ۵۲۷	۶۵۸ – ۶۸۶	۷۰۵ – ۷۵۴	۲۲		۷۷۷	۷۵۵	۲۱
-	۲۲۲-۲۶۵	۵۲۸ - ۵۵۱	۶۸۷ – ۷۰۴	۷۵۵ – ۷۷۷	۱۴		۷۹۲	۷۷۸	۲۲
-	۲۶۶-۳۰۴	۵۵۲ – ۵۸۵	۷۰۵ – ۷۵۴	۷۷۸ – ۷۹۲	۲۱		۸۱۴	۷۹۳	۲۳
-	۳۰۵ -۳۴۲	۵۸۶ – ۶۳۴	۷۵۵ – ۷۷۷	۷۹۳ – ۸۱۴	۷		۸۲۲	۸۱۵	۲۴
-	۳۴۳ – ۳۸۳	۶۳۵ – ۶۵۷	۷۷۸ – ۷۹۲	۸۱۵ - ۸۲۲	۲۷		۸۵۰	۸۲۳	۲۵
-	۳۸۴ – ۴۴۰	۶۵۸ – ۶۸۶	۷۹۳ – ۸۱۴	۸۲۳ – ۸۵۰	۳۹		۸۹۰	۸۵۱	۲۶
-	۴۴۱ – ۴۸۱	۶۸۷ – ۷۰۴	۸۱۵ - ۸۲۲	۸۵۱ – ۸۹۰	۴۹		۹۴۰	۸۹۱	۲۷
-	۴۸۲ – ۵۲۷	۷۰۵ – ۷۵۴	۸۲۳ – ۸۵۰	۸۹۱ – ۹۴۰	۳۹		۹۸۰	۹۴۱	۲۸
-	۵۲۸ - ۵۵۱	۷۵۵ – ۷۷۷	۸۵۱ – ۸۹۰	۹۴۱ – ۹۸۰	۳۰	پنجم	۱۰۱۱	۹۸۱	۲۹
-	۵۵۲ – ۵۸۵	۷۷۸ – ۷۹۲	۸۹۱ – ۹۴۰	۹۸۱ – ۱۰۱۱	۴۹		۱۰۶۱	۱۰۱۲	۳۰
۱-۲۸	۵۸۶ – ۶۳۴	۷۹۳ – ۸۱۴	۹۴۱ – ۹۸۰	۱۰۱۲-۱۰۶۱	۳۰		۱۰۹۲	۱۰۶۲	۳۱
۲۹-۸۰	۶۳۵ – ۶۵۷	۸۱۵ - ۸۲۲	۹۸۱ – ۱۰۱۱	۱۰۶۲-۱۰۹۲	۳		۱۰۹۵	۱۰۹۳	۳۲
۸۱-۱۴۳	۶۵۸ – ۶۸۶	۸۲۳ – ۸۵۰	۱۰۱۲-۱۰۶۱	۱۰۹۳-۱۰۹۵	۱۹		۱۱۱۵	۱۰۹۶	۳۳
۱۴۴-۱۹۷	۶۸۷ – ۷۰۴	۸۵۱ – ۸۹۰	۱۰۶۲-۱۰۹۲	۱۰۹۶-۱۱۱۵	۳۲		۱۱۴۸	۱۱۱۶	۳۴
۱۹۸-۱۹۸	۷۰۵ – ۷۵۴	۸۹۱ – ۹۴۰	۱۰۹۳-۱۰۹۵	۱۱۱۶-۱۱۴۸	۲۷		۱۱۷۶	۱۱۴۹	۳۵
۱۹۹-۲۲۱	۷۵۵ – ۷۷۷	۹۴۱ – ۹۸۰	۱۰۹۶-۱۱۱۵	۱۱۴۹-۱۱۷۶	۵۰		۱۲۲۷	۱۱۷۷	۳۶

۲۲۲-۲۶۵	۷۷۸ – ۷۹۲	۹۸۱ – ۱۰۱۱	۱۱۱۶-۱۱۴۸	۱۱۷۷-۱۲۲۷	۳۲		۱۲۶۰	۱۲۲۸	۳۷
۲۶۶-۳۰۴	۷۹۳ – ۸۱۴	۱۰۱۲-۱۰۶۱	۱۱۴۹-۱۱۷۶	۱۲۲۸-۱۲۶۰	۲۳		۱۲۸۴	۱۲۶۱	۳۸
۳۰۵ -۳۴۲	۸۱۵ - ۸۲۲	۱۰۶۲-۱۰۹۲	۱۱۷۷-۱۲۲۷	۱۲۶۱-۱۲۸۴	۳۲		۱۳۱۷	۱۲۸۵	۳۹
۳۴۳ – ۳۸۳	۸۲۳ – ۸۵۰	۱۰۹۳-۱۰۹۵	۱۲۲۸-۱۲۶۰	۱۲۸۵-۱۳۱۷	۹		۱۳۲۷	۱۳۱۸	۴۰
۳۸۴ – ۴۴۰	۸۵۱ – ۸۹۰	۱۰۹۶-۱۱۱۵	۱۲۶۱-۱۲۸۴	۱۳۱۸-۱۳۲۷	۳۰		۱۳۵۸	۱۳۲۸	۴۱
۴۴۱ – ۴۸۱	۸۹۱ – ۹۴۰	۱۱۱۶-۱۱۴۸	۱۲۸۵-۱۳۱۷	۱۳۲۸-۱۳۵۸	۲۷		۱۳۸۶	۱۳۵۹	۴۲
۴۸۲ – ۵۲۷	۹۴۱ – ۹۸۰	۱۱۴۹-۱۱۷۶	۱۳۱۸-۱۳۲۷	۱۳۵۹-۱۳۸۶	۳۷		۱۴۲۴	۱۳۸۷	۴۳
۵۲۸ - ۵۵۱	۹۸۱ – ۱۰۱۱	۱۱۷۷-۱۲۲۷	۱۳۲۸-۱۳۵۸	۱۳۸۷-۱۴۲۴	۲۷		۱۴۵۲	۱۴۲۵	۴۴
۵۵۲ – ۵۸۵	۱۰۱۲-۱۰۶۱	۱۲۲۸-۱۲۶۰	۱۳۵۹-۱۳۸۶	۱۴۲۵-۱۴۵۲	۶۵	ششم	۱۵۱۸	۱۴۵۳	۴۵
۵۸۶ – ۶۳۴	۱۰۶۲-۱۰۹۲	۱۲۶۱-۱۲۸۴	۱۳۸۷-۱۴۲۴	۱۴۵۳-۱۵۱۸	۲۵		۱۵۴۴	۱۵۱۹	۴۶
۶۳۵ – ۶۵۷	۱۰۹۳-۱۰۹۵	۱۲۸۵-۱۳۱۷	۱۴۲۵-۱۴۵۲	۱۵۱۹-۱۵۴۴	۱۸		۱۵۶۳	۱۵۴۵	۴۷
۶۵۸ – ۶۸۶	۱۰۹۶-۱۱۱۵	۱۳۱۸-۱۳۲۷	۱۴۵۳-۱۵۱۸	۱۵۴۵-۱۵۶۳	۱۰		۱۵۷۴	۱۵۶۴	۴۸
۶۸۷ – ۷۰۴	۱۱۱۶-۱۱۴۸	۱۳۲۸-۱۳۵۸	۱۵۱۹-۱۵۴۴	۱۵۶۴-۱۵۷۴	۱۸		۱۵۹۳	۱۵۷۵	۴۹
۷۰۵ – ۷۵۴	۱۱۴۹-۱۱۷۶	۱۳۵۹-۱۳۸۶	۱۵۴۵-۱۵۶۳	۱۵۷۵-۱۵۹۳	۳۶		۱۶۳۰	۱۵۹۴	۵۰
۷۵۵ – ۷۷۷	۱۱۷۷-۱۲۲۷	۱۳۸۷-۱۴۲۴	۱۵۶۴-۱۵۷۴	۱۵۹۴-۱۶۳۰	۳۶		۱۶۶۷	۱۶۳۱	۵۱
۷۷۸ – ۷۹۲	۱۲۲۸-۱۲۶۰	۱۴۲۵-۱۴۵۲	۱۵۷۵-۱۵۹۳	۱۶۳۱-۱۶۶۷	۱۷		۱۶۸۵	۱۶۶۸	۵۲
۷۹۳ – ۸۱۴	۱۲۶۱-۱۲۸۴	۱۴۵۳-۱۵۱۸	۱۵۹۴-۱۶۳۰	۱۶۶۸-۱۶۸۵	۱۰	هفتم	۱۶۹۶	۱۶۸۶	۵۳
۸۱۵ - ۸۲۲	۱۲۸۵-۱۳۱۷	۱۵۱۹-۱۵۴۴	۱۶۳۱-۱۶۶۷	۱۶۸۶-۱۶۹۶	۱۰		۱۷۰۷	۱۶۹۷	۵۴
۸۲۳ – ۸۵۰	۱۳۱۸-۱۳۲۷	۱۵۴۵-۱۵۶۳	۱۶۶۸-۱۶۸۵	۱۶۹۷-۱۷۰۷	۹		۱۷۱۷	۱۷۰۸	۵۵
۸۵۱ – ۸۹۰	۱۳۲۸-۱۳۵۸	۱۵۶۴-۱۵۷۴	۱۶۸۶-۱۶۹۶	۱۷۰۸-۱۷۱۷	۱۵		۱۷۳۳	۱۷۱۸	۵۶
۸۹۱ – ۹۴۰	۱۳۵۹-۱۳۸۶	۱۵۷۵-۱۵۹۳	۱۶۹۷-۱۷۰۷	۱۷۱۸-۱۷۳۳	۱۰		۱۷۴۴	۱۷۳۴	۵۷
۹۴۱ – ۹۸۰	۱۳۸۷-۱۴۲۴	۱۵۹۴-۱۶۳۰	۱۷۰۸-۱۷۱۷	۱۷۳۴-۱۷۴۴	۸		۱۷۵۳	۱۷۴۵	۵۸
۹۸۱ – ۱۰۱۱	۱۴۲۵-۱۴۵۲	۱۶۳۱-۱۶۶۷	۱۷۱۸-۱۷۳۳	۱۷۴۵-۱۷۵۳	۸		۱۷۶۲	۱۷۵۴	۵۹
۱۰۱۲-۱۰۶۱	۱۴۵۳-۱۵۱۸	۱۶۶۸-۱۶۸۵	۱۷۳۴-۱۷۴۴	۱۷۵۴-۱۷۶۲	۱۴	هشتم	۱۷۷۷	۱۷۶۳	۶۰
۱۰۶۲-۱۰۹۲	۱۵۱۹-۱۵۴۴	۱۶۸۶-۱۶۹۶	۱۷۴۵-۱۷۵۳	۱۷۶۳-۱۷۷۷	۲۷		۱۸۰۵	۱۷۷۸	۶۱
۱۰۹۳-۱۰۹۵	۱۵۴۵-۱۵۶۳	۱۶۹۷-۱۷۰۷	۱۷۵۴-۱۷۶۲	۱۷۷۸-۱۸۰۵	۳۲		۱۸۳۸	۱۸۰۶	۶۲
۱۰۹۶-۱۱۱۵	۱۵۶۴-۱۵۷۴	۱۷۰۸-۱۷۱۷	۱۷۶۳-۱۷۷۷	۱۸۰۶-۱۸۳۸	۲۰		۱۸۵۹	۱۸۳۹	۶۳
۱۱۱۶-۱۱۴۸	۱۵۷۵-۱۵۹۳	۱۷۱۸-۱۷۳۳	۱۷۷۸-۱۸۰۵	۱۸۳۹-۱۸۵۹	۳۳		۱۸۹۳	۱۸۶۰	۶۴
۱۱۴۹-۱۱۷۶	۱۵۹۴-۱۶۳۰	۱۷۳۴-۱۷۴۴	۱۸۰۶-۱۸۳۸	۱۸۶۰-۱۸۹۳	۳۷		۱۹۳۱	۱۸۹۴	۶۵
۱۱۷۷-۱۲۲۷	۱۶۳۱-۱۶۶۷	۱۷۴۵-۱۷۵۳	۱۸۳۹-۱۸۵۹	۱۸۹۴-۱۹۳۱	۲۵		۱۹۵۷	۱۹۳۲	۶۶
۱۲۲۸-۱۲۶۰	۱۶۶۸-۱۶۸۵	۱۷۵۴-۱۷۶۲	۱۸۶۰-۱۸۹۳	۱۹۳۲-۱۹۵۷	۲۰	نهم	۱۹۷۸	۱۹۵۸	۶۷
۱۲۶۱-۱۲۸۴	۱۶۸۶-۱۶۹۶	۱۷۶۳-۱۷۷۷	۱۸۹۴-۱۹۳۱	۱۹۵۸-۱۹۷۸	۲۳		۲۰۰۲	۱۹۷۹	۶۸
۱۲۸۵-۱۳۱۷	۱۶۹۷-۱۷۰۷	۱۷۷۸-۱۸۰۵	۱۹۳۲-۱۹۵۷	۱۹۷۹-۲۰۰۲	۱۵		۲۰۱۸	۲۰۰۳	۶۹
۱۳۱۸-۱۳۲۷	۱۷۰۸-۱۷۱۷	۱۸۰۶-۱۸۳۸	۱۹۵۸-۱۹۷۸	۲۰۰۳-۲۰۱۸	۴۷		۲۰۶۶	۲۰۱۹	۷۰
۱۳۲۸-۱۳۵۸	۱۷۱۸-۱۷۳۳	۱۸۳۹-۱۸۵۹	۱۹۷۹-۲۰۰۲	۲۰۱۹-۲۰۶۶	۲۰		۲۰۸۷	۲۰۶۷	۷۱
۱۳۵۹-۱۳۸۶	۱۷۳۴-۱۷۴۴	۱۸۶۰-۱۸۹۳	۲۰۰۳-۲۰۱۸	۲۰۶۷-۲۰۸۷	۲۶	دهم	۲۱۱۴	۲۰۸۸	۷۲
۱۳۸۷-۱۴۲۴	۱۷۴۵-۱۷۵۳	۱۸۹۴-۱۹۳۱	۲۰۱۹-۲۰۶۶	۲۰۸۸-۲۱۱۴	۱۵		۲۱۳۰	۲۱۱۵	۷۳
۱۴۲۵-۱۴۵۲	۱۷۵۴-۱۷۶۲	۱۹۳۲-۱۹۵۷	۲۰۶۷-۲۰۸۷	۲۱۱۵-۲۱۳۰	۲۷		۲۱۵۸	۲۱۳۱	۷۴

۳۷		۲۱۹۶	۲۱۵۹	۷۵
۲۴		۲۲۲۱	۲۱۹۷	۷۶
۴۱	یازدهم	۲۲۶۳	۲۲۲۲	۷۷
۱۵		۲۲۷۹	۲۲۶۴	۷۸
۲۷		۲۳۰۷	۲۲۸۰	۷۹
۳۹		۲۳۴۷	۲۳۰۸	۸۰
۱	دوازدهم	۲۳۴۸	۲۳۴۸	۸۱
۲۶		۲۳۷۵	۲۳۴۹	۸۲
۳۶		۲۴۱۲	۲۳۷۶	۸۳
۲۷	سیزدهم	۲۴۴۰	۲۴۱۳	۸۴
۱۹		۲۴۶۰	۲۴۴۱	۸۵
۵۰	چهاردهم	۲۵۱۱	۲۴۶۱	۸۶
۱۴		۲۵۲۶	۲۵۱۲	۸۷
۵۹		۲۵۸۶	۲۵۲۷	۸۸
۳۶	پانزدهم	۲۶۲۳	۲۵۸۷	۸۹
۲۳		۲۶۴۷	۲۶۲۴	۹۰
۳۵		۲۶۸۳	۲۶۴۸	۹۱
۲۹		۲۷۱۳	۲۶۸۴	۹۲
۵۷	شانزدهم	۲۷۷۱	۲۷۱۴	۹۳
۱		۲۷۷۲	۲۷۷۲	۹۴
۳۰		۲۸۰۳	۲۷۷۳	۹۵
۱۳		«فلش‌کارت پایانی»	۲۸۰۴	۹۶

حالا کسب درصد بالا در «پژوهش عملیاتی» به یک امر کاملا دست‌یافتنی مبدل شد.

- مربع‌های توخالی‌ای که روی هر فلش‌کارت قرار دارد بدین منظور پیش‌بینی شده که هر بار که مطابق با زمان‌بندی مرور کردید داخل یکی از آنها تیک بزنید. در پایان همه فلش‌کارت‌ها باید دارای ۵ تیک باشند. (5thicks)

۲۱۳۱-۲۱۵۸	۲۰۸۸-۲۱۱۴	۱۹۵۸-۱۹۷۸	۱۷۶۳-۱۷۷۷	۱۴۵۳-۱۵۱۸
۲۱۵۹-۲۱۹۶	۲۱۱۵-۲۱۳۰	۱۹۷۹-۲۰۰۲	۱۷۷۸-۱۸۰۵	۱۵۱۹-۱۵۴۴
۲۱۹۷-۲۲۲۱	۲۱۳۱-۲۱۵۸	۲۰۰۳-۲۰۱۸	۱۸۰۶-۱۸۳۸	۱۵۴۵-۱۵۶۳
۲۲۲۲-۲۲۶۳	۲۱۵۹-۲۱۹۶	۲۰۱۹-۲۰۶۶	۱۸۳۹-۱۸۵۹	۱۵۶۴-۱۵۷۴
۲۲۶۴-۲۲۷۹	۲۱۹۷-۲۲۲۱	۲۰۶۷-۲۰۸۷	۱۸۶۰-۱۸۹۳	۱۵۷۵-۱۵۹۳
۲۲۸۰-۲۳۰۷	۲۲۲۲-۲۲۶۳	۲۰۸۸-۲۱۱۴	۱۸۹۴-۱۹۳۱	۱۵۹۴-۱۶۳۰
۲۳۰۸-۲۳۴۷	۲۲۶۴-۲۲۷۹	۲۱۱۵-۲۱۳۰	۱۹۳۲-۱۹۵۷	۱۶۳۱-۱۶۶۷
۲۳۴۸-۲۳۴۸	۲۲۸۰-۲۳۰۷	۲۱۳۱-۲۱۵۸	۱۹۵۸-۱۹۷۸	۱۶۶۸-۱۶۸۵
۲۳۴۹-۲۳۷۵	۲۳۰۸-۲۳۴۷	۲۱۵۹-۲۱۹۶	۱۹۷۹-۲۰۰۲	۱۶۸۶-۱۶۹۶
۲۳۷۶-۲۴۱۲	۲۳۴۸-۲۳۴۸	۲۱۹۷-۲۲۲۱	۲۰۰۳-۲۰۱۸	۱۶۹۷-۱۷۰۷
۲۴۱۳-۲۴۴۰	۲۳۴۹-۲۳۷۵	۲۲۲۲-۲۲۶۳	۲۰۱۹-۲۰۶۶	۱۷۰۸-۱۷۱۷
۲۴۴۱-۲۴۶۰	۲۳۷۶-۲۴۱۲	۲۲۶۴-۲۲۷۹	۲۰۶۷-۲۰۸۷	۱۷۱۸-۱۷۳۳
۲۴۶۱-۲۵۱۱	۲۴۱۳-۲۴۴۰	۲۲۸۰-۲۳۰۷	۲۰۸۸-۲۱۱۴	۱۷۳۴-۱۷۴۴
۲۵۱۲-۲۵۲۶	۲۴۴۱-۲۴۶۰	۲۳۰۸-۲۳۴۷	۲۱۱۵-۲۱۳۰	۱۷۴۵-۱۷۵۳
۲۵۲۷-۲۵۸۶	۲۴۶۱-۲۵۱۱	۲۳۴۸-۲۳۴۸	۲۱۳۱-۲۱۵۸	۱۷۵۴-۱۷۶۲
۲۵۸۷-۲۶۲۳	۲۵۱۲-۲۵۲۶	۲۳۴۹-۲۳۷۵	۲۱۵۹-۲۱۹۶	۱۷۶۳-۱۷۷۷
۲۶۲۴-۲۶۴۷	۲۵۲۷-۲۵۸۶	۲۳۷۶-۲۴۱۲	۲۱۹۷-۲۲۲۱	۱۷۷۸-۱۸۰۵
۲۶۴۸-۲۶۸۳	۲۵۸۷-۲۶۲۳	۲۴۱۳-۲۴۴۰	۲۲۲۲-۲۲۶۳	۱۸۰۶-۱۸۳۸
۲۶۸۴-۲۷۱۳	۲۶۲۴-۲۶۴۷	۲۴۴۱-۲۴۶۰	۲۲۶۴-۲۲۷۹	۱۸۳۹-۱۸۵۹
۲۷۱۴-۲۷۷۱	۲۶۴۸-۲۶۸۳	۲۴۶۱-۲۵۱۱	۲۲۸۰-۲۳۰۷	۱۸۶۰-۱۸۹۳
۲۷۷۲-۲۷۷۲	۲۶۸۴-۲۷۱۳	۲۵۱۲-۲۵۲۶	۲۳۰۸-۲۳۴۷	۱۸۹۴-۱۹۳۱
۲۷۷۳-۲۸۰۳	۲۷۱۴-۲۷۷۱	۲۵۲۷-۲۵۸۶	۲۳۴۸-۲۳۴۸	۱۹۳۲-۱۹۵۷
۲۸۰۴-۲۸۱۸	۲۷۷۲-۲۷۷۲	۲۵۸۷-۲۶۲۳	۲۳۴۹-۲۳۷۵	۱۹۵۸-۱۹۷۸
-	۲۷۷۳-۲۸۰۳	۲۶۲۴-۲۶۴۷	۲۳۷۶-۲۴۱۲	۱۹۷۹-۲۰۰۲
-	۲۸۰۴-۲۸۱۸	۲۶۴۸-۲۶۸۳	۲۴۱۳-۲۴۴۰	۲۰۰۳-۲۰۱۸
-	-	۲۶۸۴-۲۷۱۳	۲۴۴۱-۲۴۶۰	۲۰۱۹-۲۰۶۶
-	-	۲۷۱۴-۲۷۷۱	۲۴۶۱-۲۵۱۱	۲۰۶۷-۲۰۸۷
-	-	۲۷۷۲-۲۷۷۲	۲۵۱۲-۲۵۲۶	۲۰۸۸-۲۱۱۴
-	-	۲۷۷۳-۲۸۰۳	۲۵۲۷-۲۵۸۶	۲۱۱۵-۲۱۳۰
-	-	۲۸۰۴-۲۸۱۸	۲۵۸۷-۲۶۲۳	۲۱۳۱-۲۱۵۸
-	-	-	۲۶۲۴-۲۶۴۷	۲۱۵۹-۲۱۹۶
-	-	-	۲۶۴۸-۲۶۸۳	۲۱۹۷-۲۲۲۱
-	-	-	۲۶۸۴-۲۷۱۳	۲۲۲۲-۲۲۶۳
-	-	-	۲۷۱۴-۲۷۷۱	۲۲۶۴-۲۲۷۹
-	-	-	۲۷۷۲-۲۷۷۲	۲۲۸۰-۲۳۰۷
-	-	-	۲۷۷۳-۲۸۰۳	۲۳۰۸-۲۳۴۷
-	-	-	۲۸۰۴-۲۸۱۸	۲۳۴۸-۲۳۴۸
-	-	-	-	۲۳۴۹-۲۳۷۵
-	-	-	-	۲۳۷۶-۲۴۱۲
-	-	-	-	۲۴۱۳-۲۴۴۰

۲۴۴۱-۲۴۶۰	-	-	-	-
۲۴۶۱-۲۵۱۱	-	-	-	-
۲۵۱۲-۲۵۲۶	-	-	-	-
۲۵۲۷-۲۵۸۶	-	-	-	-
۲۵۸۷-۲۶۲۳	-	-	-	-
۲۶۲۴-۲۶۴۷	-	-	-	-
۲۶۴۸-۲۶۸۳	-	-	-	-
۲۶۸۴-۲۷۱۳	-	-	-	-
۲۷۱۴-۲۷۷۱	-	-	-	-
۲۷۷۲-۲۷۷۲	-	-	-	-
۲۷۷۳-۲۸۰۳	-	-	-	-
۲۸۰۴-۲۸۱۸	-	-	-	-

- پژوهش، یک درس حل کردنی است. اینکه فلش کارت‌ها را درک کنید کافی نیست؛ لازم است پس از مطالعه هر فلش کارت قلم و کاغذ سفید در اختیار داشته باشید و مجددا خودتان یک بار دیگر (بدون نگاه به پاسخ فیش) آنرا حل کنید. (و در مورد مباحث تئوریک و تعاریف مهم برای خود تکرار کنید. در مورد مباحث تئوریک نیازی به حفظ کردن نیست، همینکه مفهوم را درک کرده باشید، کافی است.)
- مربع‌های توخالی‌ای که روی هر فلش کارت قرار دارد بدین منظور پیش‌بینی شده که هر بار که مطابق با زمان‌بندی مرور کردید داخل یکی از آنها تیک بزنید. در پایان همه فلش-کارت‌ها باید دارای ۵ تیک باشند. (5thicks)
- ما معتقدیم لازم نیست مطالعه، یک اجبار کسل کننده برای قبولی در آزمون باشد، بلکه می‌تواند یک فعالیت شیرین، شاد و خوشایند باشد. به همین خاطر تلاش کرده‌ایم مطالب با زبانی ساده و با مثال-هایی ملموس بیان شوند و کمترین تلاش ذهنی را از داوطلب، طلب کند. و نیز این همه کتاب را که ضخامت صفحات هریک شاید قبلا باعث می‌شد اصلا رغبت نکنیم طرفش برویم، حالا همه یکجا در یک پک در اختیار شما عزیزان قرار داده شده آن هم در قالب فلش کارت، فلش کارت‌هایی که می‌توانید هر روز با خود حمل کنید و در اوقات پرت خود در طول روز مطالعه‌شان کنید.

و به این خاطر برخی مطالب در قالب کتابچه، آموزش داده شده که بتوانید گام های متوالی حل مسائل پژوهش عملیاتی را در یک صفحه بزرگ‌تر(سایز A4) به صورت یکجا ببینید. این کار در تحرک «حافظه تصویری» و «سرعت یادگیری مطالب به دلیل امکان لینک مراحل مختلف حل یک تمرین» و نیز «درک بهتر راه‌حل» موثر است.

- توجه دارید که آخرین دسته فلش کارت‌ها در روز نود و ششم مطالعه می‌شوند و مابقی روزها برای مرور فیش‌های قبلی است. لطفا مرورها را جدی بگیرید. زمان‌بندی مرورها کاملا منطبق با فرآیند طبیعی مغز انسان و مطابق با روش لایتنر طراحی شده است.اگرچه رعایت دقیق زمان‌بندی به‌خصوص در مرورهای اول،دوم و سوم مهم است اما ممکن است مطالعه برخی بخشها که برای هرروز برنامه ریزی شده بیشتر و یا کمتر از سایر بخشها زمان ببرد، زیرا در برنامه ریزی سعی شده است یکپارچگی مطلب در مطالعه لحاظ گردد. با این اوصاف، اگر خودتان صلاح دانستید می توانید زمان مطالعه برخی از بخشهای معین شده برای هر روز را کمی بیشتر کنید.

  این بسیار با اهمیت است که آمادگی‌ای را که در پایان مطالعه پک به دست می‌آورید تا روز کنکور حفظ (و حتی تقویت) کنید، این مهم با زدن تست‌های سال‌های گذشته کنکور تحقق می‌یابد.
- برنامه‌ریزی‌ای که به شکل نافوذآگاه بواسطه بهره‌مندی از تکنیک DLM به شما القا می‌شود، خود نقش مهمی در موفقیت شما ایفا می کند.
- در جلسه کنکور ابتدا تست‌هایی را که مطمئن هستید بلدید بزنید، سپس دوباره برگردید و تست‌های مشکل‌تر یا تست‌های زمان‌برتر را اگر فرصت کافی داشتید پاسخ دهید. توجه داشته باشید خطر نمره منفی بزرگترین تهدید برای شما محسوب می‌شود که می‌تواند پاسخ‌های صحیح شما را ضایع کند.

«پس جداً از پاسخ دادن به تست‌هایی که به پاسخ آن مطمئن نیستید،پرهیز کنید و با خیال راحت در پاسخ‌نامه سفید بگذارید. دیگران آنها را جواب می‌دهند،نمره منفی می گیرند و شما از آنها جلو خواهید افتاد.»

- حتما به سامانه پیام کوتاه گروه DLM به شماره **۳۰۰۰۷۶۵۰۰۰۱۷۷۴** پیامک بزنید و در متن پیامک تایپ کنید: ***OR*** . توجه داشته باشید « کلیه اطلاع‌رسانی‌های ما از طریق SMS صورت می گیرد.»
- ما را از پیشنهادات و نظرات خود بی‌نصیب نگذارید. (idea@DLMgroup.ir)
- حتما پس از پایان فرآیند مطالعه، شروع به زدن تست‌های کنکور سال‌های گذشته (حداقل ۱۰ سال) کنید و آنها را خوب یاد بگیرید.

موفق و پیـــــــروز باشید

– منابعی که در تالیف پک از آنها استفاده شده به شرح ذیل است:

شماره منبع	عنوان کتاب	مولف	انتشارات
۱	پژوهش عملیاتی	محمد رضا مهرگان	نشر کتاب دانشگاهی
۲	پژوهش عملیاتی	عارفه فدوی	نگاه دانش
۳	مفاهیم،نکات درسی و حل مسائل پژوهش عملیاتی	محمد رضا مهرگان	نشر کتاب دانشگاهی
۴	پژوهش عملیاتی پیشرفته	محمد رضا مهرگان	نشر کتاب دانشگاهی
۵	تحقیق در عملیات پیشرفته-جلد چهارم	محمد جواد اصغرپور	دانشگاه تهران
۶	تحقیق در عملیات ۱	اکبر عالم تبریز	پوران پژوهش
۷	تحقیق در عملیات ۲	اکبر عالم تبریز	پوران پژوهش
۸	شرح جامع تحقیق در عملیات	محمد محمد علی ابراهیمی	انتشارات ارشد
۹	مجموعه آزمون‌های ۱۰ سال کنکور ارشد تحقیق در عملیات	محمد محمد علی ابراهیمی	انتشارات ارشد
۱۰	مدل سازی ریاضی	محمد رضا مهرگان	دانشگاه تهران
۱۱	آشنایی با تحقیق در عملیات- جلد اول	حمدی طاها-ترجمه محمد باقر بازرگان	مرکز نشر دانشگاهی
۱۲	تحقیق در عملیات،برنامه ریزی خطی-جلد اول	هیلیر و لیبرمن-ترجمه محمد مدرس و اردوان آصف وزیری	چاپ دلارنگ
۱۳	مباحث نوین تحقیق در عملیات	منصور مومنی	دانشگاه تهران
۱۴	ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت۱	مسعود نیکوکار	گسترش علوم پایه
۱۵	ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت۲	مسعود نیکوکار	گسترش علوم پایه
۱۶	تحقیق در عملیات	امیر صادقی	نشر پردازش
۱۷	تحقیق در عملیات		مدرسان شریف
۱۸	تحقیق در عملیات		کانون فرهنگی آموزش
۱۹	تحقیق در عملیات		علوی
۲۰	پژوهش عملیاتی		ماهان
۲۱	مجموعه سوالات کنکور کارشناسی ارشد دانشگاه های سراسری- مدیریت	عارفه فدوی	نگاه دانش
۲۲	مجموعه سوالات کنکور کارشناسی ارشد دانشگاه های آزاد- مدیریت	عارفه فدوی	نگاه دانش

توضیح: در فلش‌کارت‌ها به جای نام منبع،شماره منبع بیان شده است.

فصل	زمان مطالعه (روز)	
1	3	
2	4	
3	7	
4	14	
5	10	
6	13	
7	4	
8	10	
9	4	
10	5	
11	5	
12	4	
13	2	
14	2	
15	4	
16	5	
	96	جمع

موفق باشـــــید.این یک دستور است.

با احتـــــرام

DLMgroup

فصل ۲- مدلسازی ریاضی

سخن آغاز فصل

شاید بتوان مبحث مدلسازی ریاضی را یکی از مهمترین و شیرین ترین بخشهای تحقیق در عملیات دانست. این مبحث به چگونگی ایجاد یک مدل ریاضی از مسأله واقعـی می پردازد. یک مدل خوب می تواند فرآیند حل مسأله را تسهیل نماید و تصمیم گیرنده را به نتایج درست و قابل قبول هدایت کند. شاید با خواندن این فصل بتوانید بسیاری از مسائل رایج در زندگی شخصی خود را نیز بصورت مدل درآورید.

فهرست فصل دوم

تعاریف، کلیات و توضیح مدلسازی ریاضی.....۱۴۷-۱۹۸
مثال های مدلسازی ریاضی.....۱۹۹-۲۲۱
تست های پایان فصل.....۲۲۲-۲۴۵
موردی خاص از مدلسازی.....۲۴۶-۲۵۸
ورودیها و خروجیهای مدل.....۲۵۹-۲۶۴

توضیحی در مورد آموزش مدل سازی در این فصل:

در این فصل، مدلسازی مربوط به مدلهای برنامه ریزی خطی ارائه گردیده است.

منظور از برنامه ریزی خطی در تحقیق در عملیات چیست؟

برنامه ریزی خطی یک مدل ریاضی است از واقعیت. با حل این مدل می توانیم مسائل پیچیده را حل نمائیم و برای تصمیم گیری از آن استفاده کنیم.

تعریف برنامه ریزی خطی چیست؟

برنامه ریزی خطی مدلی است ریاضی برای جستجو و انتخاب بهترین برنامه (روش انجام کار) از میان مجموعه راههای ممکن.

بعبارت دیگر، برنامه ریزی خطی یکی از انواع مدلهای ریاضی است، از این مدلها برای فرموله کردن مسائل و بدست آوردن جواب آنها استفاده می شود. مدل سازی هایی که در فصل قبل با آن ها سرو کار داشتیم نیز برنامه ریزی خطی بودند.

مدل برنامه ریزی خطی چگونه است؟

مـــدل برنامـــه ریـــزی خطـــی یکـــی از مـــدلهای کـــارا در حـــل مســـائل واقعـــی در زمینـــه هـــای مختلـــف از جملـــه تخصـــیص منـــابع کمیـــاب ماننـــد مـــواد اولیـــه، نیـــروی انســـانی و ... اســـت و بـــه طـــور وســـیع در مســـائل مختلـــف مـــورد اســـتفاده قـــرار مـــی گیـــرد. ایـــن مـــدل از ســـه بخش تابع هدف، محدودیت ها و وضعیت متغیرها تشکیل می شود. (همـــان طـور که در فصـل قبـل دیدیم)

تابع هدف

محدودیت ها

وضعیت متغیرها

شرایط خطی بودن توابع را نام ببرید؟

۱۹ ص ۳

۱- همه متغیرها از نوع درجه اول هستند (توان ۱ دارند)
۲- رابطه حاصل ضربی بین متغیرها وجود ندارد
۳- علامت قدرمطلق در توابع وجود ندارد
۴- توابع مثلثاتی و لگاریتمی وجود ندارند
۵- تابع هدف به صورت مرکب نیست (مثلاً $Max\{Min\}$ یا ...)

توجه:
موارد ۳ و ۴ و ۵ قابل تبدیل به برنامه ریزی خطی هستند.

به برنامه ریزی خطی، اختصاراً ..... هم گفته می شود.

LP (Linear Programing)

حالت کلی یک مدل برنامه ریزی خطی:

تابع هدف

$$\left\{\begin{array}{l}\text{محدودیت}\\ \text{یا محدودیت ها}\end{array}\right.$$

وضعیت متغیرهای تصمیم

هر مدل برنامه ریزی خطی از سه قسمت تشکیل شده، آن سه قسمت را نام ببرید؟

۱ ص ۳۲

۱- تابع هدف

۲- محدودیت ها

۳- وضعیت متغیرهای تصمیم

عناصر تشکیل دهنده ی مدل برنامه ریزی خطی را نام ببرید؟

هر مدل سه قسمت اصلی دارد که به آنها اشاره شد و عبارت بودند از تابع هدف، محدودیت یا محدودیت ها و وضعیت متغیرهای تصمیم.

تابع هدف و محدودیت ها از ترکیب پارامترها و متغیرهای تصمیم ساخته می شوند. در فیش های آینده به توضیح چهار جزء سازنده یک مدل یعنی پارامترها، متغیرهای تصمیم، تابع هدف و محدودیت ها خواهیم پرداخت.

منظور از « پارامترها » در مدل چیست؟

۱۰ ص ۱۸

پارامترها عوامل محیطی غیرقابل کنترل سیستم مورد بررسی ما هستند.

(پارامترها معلوم هستند)

پارامترها را تعریف کنید؟

۱ ص ۲۶

شرایط قابل اندازه گیری ذاتی در ساختار مسأله هستند که در اصطلاح ریاضی به آنها "ثابت" گفته می شود. (مانند هزینه نگهداری یک واحد کالا در یک دوره زمانی، هزینه سفارش و ....)

در برنامه ریزی خطی، اعداد مشخصی که در مدل هستند همان ..... هستند.

پارامترها

ما می خواهیم مداد تولید کنیم، برای تولید هر واحد مداد ۲۰ سانتی متر چوب و ۱۰ گرم ذغال نیاز داریم، پارامترها کدامند؟

۲۰ سانتی متر چوب برای تولید هر مداد

۱۰ گرم ذغال برای تولید هر مداد

ما می خواهیم مداد تولید کنیم، برای تولید هر واحد مداد ۲۰ سانتی متر چوب و ۱۰ گرم ذغال نیاز داریم، کلاً ۱۰ متر چوب و ۳ کیلو ذغال داریم، پارامترها کدامند؟

$$\left.\begin{array}{l}\text{۲۰ سانتی متر چوب برای هر واحد تولید}\\ \text{۱۰ گرم ذغال برای هر واحد تولید}\\ \text{۱۰ متر چوب}\\ \text{۳ کیلو ذغال}\end{array}\right\}$$

چند مورد از پارامترها را نام ببرید؟

۱۰ ص ۱۸

عواملی از قبیل قیمت در بازار رقابت کامل برای یک محصول، ظرفیت یک انبار در کوتاه مدت، و میزان مواد اولیه برای ساخت یک واحد محصول، نمونه هایی از پارامترها هستند.

منظور از متغیرهای تصمیم چیست؟

۱۰ ص ۱۸

متغیرهای تصمیم، متغیرهایی هستند که مقدار آنها نامشخص است و تصمیم گیرنده باید مقدار این متغیرها را به دست آورد در واقع هدف از مدل سازی و حل مدل، تصمیم گیری در مورد مقدار این متغیرها است.

(مقدار متغیرهای تصمیم قبل از حل مدل مجهول است)

نماد متغیرهای تصمیم در برنامه ریزی خطی؟

عموماً به صورت x_i یا x_{ij} یا x_{ijk} یا ... می باشد

هدف از حل یک مسأله برنامه ریزی خطی، تعیین مقدار ..... است.

متغیرهای تصمیم

..... عوامل قابل اندازه گیری هستند که در حل مسأله مورد نظر تعیین می شوند.

۱ ص ۲۵

متغیرها

متغیرهای تصمیم گیری مجهولهایی هستند که مقادیر آنها از ..... بدست می آید.

۶ ص ۱۲

جواب مدل

ما می خواهیم در مورد تعداد تولید دو نوع خودکار تصمیم بگیریم، مدل سازی را انجام می دهیم و حل می کنیم.

متغیرهای تصمیم کدامند ؟

متغیر تصمیم اول: تعداد تولید خودکار نوع اول (می توان آنرا X_1 نامید)

متغیر تصمیم دوم: تعداد تولید خودکار نوع دوم (می توان آنرا X_2 نامید)

متغیرهایی که مستقیماً تحت کنترل تصمیم گیرنده اند غالباً ..... نامیده می شوند.

۱ ص ۲۵

متغیرهای تصمیم

یعنی تصمیم گیرنده قادر است در مورد مقدار آنها تصمیم بگیرد و مقدار آنها بصورت از پیش تعیین شده از محیط دیکته نمی شود. مدلسازی و حل مدل به تصمیم گیرنده کمک می کنند تا بتواند در مورد مقدار این متغیرها تصمیم بگیرد.

چند مورد از متغیرهای تصمیم را نام ببرید؟

۱۰ ص ۱۸

میزان تولید از هر محصول ـ میزان پولی که باید سرمایه گذاری شود و ...

فرض کنید که می توانیم محصول A و B را تولید کنیم، متغیرهای تصمیم کدامند؟

x_B و x_A متغیرهای تصمیم هستند

$x_۱$ یا x_A یعنی میزان تولید محصول A

$x_۲$ یا x_B یعنی میزان تولید محصول B

ما می خواهیم مداد تولید کنیم، برای تولید هر واحد مداد ۲۰ سانتی متر چوب و ۱۰ گرم ذغال نیاز داریم، کلاً ۱۰ متر چوب و ۳ کیلو ذغال داریم، **متغیرهای تصمیم** کدامند؟

متغیر تصمیم اول: تعداد تولید از مداد اول (X_1)

متغیر تصمیم دوم: تعداد تولید از مداد دوم (X_2)

تا اینجا با مفهوم پارامترها و متغیرها آشنا شدیم، علاوه بر استفاده از پارامترها و متغیرها در تشکیل تابع هدف و محدودیت ها، در هر مدل باید وضعیت متغیرها نیز تعریف شود، یعنی معلوم باشد مقدار هر متغیر در چه دامنه ای تعریف شده و صحیح است. یادآوری می کنم که هر مدل از سه قسمت به شکل مقابل تشکیل شده است، پارامترها و متغیرها درون تابع هدف و محدودیت ها مورد استفاده قرار می گیرند و وضعیت متغیرها بعنوان یکی از بخشهای مدل باید قید گردد.

تابع هدف

محدودیت ها

وضعیت متغیرها

وضعیت متغیرها چه حالت هایی می تواند باشد؟

۱۰ ص ۳۹

وضعیت متغیرها می تواند به دو صورت غیرمنفی ($X_i \geq 0$) و یا « آزاد در علامت» باشد.

متغیرهای تصمیم عمدتاً دارای یکی از دو وضعیت زیر است:

۱ ص ۳۲

۱) $(j = ۱, ۲, \dots, n)$ و $x_j \geq ۰$

۲) متغیر تصمیم آزاد در علامت

حالت اول بیانگر آنست که متغیر تصمیم فقط می تواند بزرگتر از صفر یا مساوی با آن باشد.

حالت دوم بیانگر آنست که متغیر تصمیم می تواند بزرگتر از صفر، مساوی صفر و یا کوچکتر از صفر باشد.

در یک متغیر تصمیم آزاد در علامت، x_j می تواند مقادیر .....، ..... یا ..... را اختیار کند.

۱ ص ۳۲

مثبت

منفی

صفر

در یک مدل برنامه ریزی خطی، یک سری اعداد ثابت و معلوم وجود دارد که ..... مدل هستند و یک سری مجهول وجود دارد که بیانگر ..... هستند.

پارامترهای
متغیرهای تصمیم

هدف از حل یک مدل برنامه ریزی خطی، تعیین مقدار ..... جهت رسیدن به ..... است.

متغیرهای تصمیم
جواب بهینه

منظور از جواب بهینه در برنامه ریزی خطی چیست؟

جواب بهینه جوابی است که هم امکانپذیر باشد و هم مطلوب ماست.

در برنامه ریزی خطی تابع هدف بیانگر چیست؟

- ۱۰ ص ۳۹

تابع هدف بیانگر هدف تصمیم گیرنده است.

(بعنوان مثال ممکن است هدف اصلی ما از حل یک مدل، رسیدن به حداکثر سود باشد.)

منظور از تابع هدف چیست؟

تابع هدف بیانگر هدف و مقصود مدل است. ممکن است هدف مدل حداکثر کردن (مثلاً سود) یا حداقل کردن (مثلاً هزینه) باشد.

تعریف تابع هدف چیست؟

۱ ص ۳۱

تابعی است ریاضی که از متغیرهای تصمیم تشکیل شده و بیانگر هدف مدل می باشد.

تابع هدف نشان دهنده ..... تصمیم گیرنده مانند حداکثر کردن سود یا حداقل کردن هزینه است.

خواسته ها و آرزوهای

تابع هدف بیانگر هدف تصمیم گیرنده است و ممکن است بصورت ..... یا ..... باشد.

۱۰ ص ۳۹

حداکثر کردن – حداقل کردن

تـــابع هـــدفی کـــه در پـــی حـــداکثر کـــردن باشـــد بـــا نمـــاد ..... و تـــابع هـــدفی کـــه در پی حداقل کردن باشد با نماد ..... نشان داده می شود.

۱ ص ۳۱

$$Maxz = \mathrm{f}(x_j) \quad \leftarrow \quad \text{حداکثر کردن}$$

$$Minz = \mathrm{f}(x_j) \quad \leftarrow \quad \text{حداقل کردن}$$

$$j = (۱,۲ , \dots , n)$$

فرض کنید تولید محصول A، سه واحد سود و تولید محصول B، پنج واحد سود دارد، و هدف از حل مسأله، تعیین تعداد تولید محصول A و B جهت به حداکثر رساندن سود باشد، در این صورت تابع هدف به چه شکلی است؟

$$Maxz = ۳x_A + ۵x_B$$

هدف حداکثر کردن سود است، پس $Maxz$

سود تولید هر واحد محصول A، سه است، پس $۳x_{\mathrm{A}}$

سود تولید هر واحد محصول B، پنج است، پس $۵x_{\mathrm{B}}$

می خواهیم با هدف حداکثر کردن سود در مورد تعداد تولید دو نوع مداد تصمیم بگیریم، هر واحد مداد نوع اول ۳ واحد و مداد دوم ۴ واحد سود در بردارد، تابع هدف چگونه است؟

$$\text{Max } Z = ۳x_۱ + ۴x_۲$$

در تابع هدف زیر، پارامترها و متغیرهای تصمیم کدامند؟

$$Maxz = ۳x_A + ۵x_B$$

عدد ۳ و ۵ پارامتر هستند

متغیرهای x_B و x_A متغیرهای تصمیم هستند

(معنی x_A یعنی میزان تولید محصول A)

در برنامه ریزی خطی، محدودیت ها چه چیزی را نشان می دهند؟

۱۰ ص ۳۹

محدودیت ها موانع دستیابی به هدف را بیان می کنند.

(بعنوان مثال محدودیت نیروی انسانی، مواد اولیه، ماشین آلات و ...)

منظور از محدودیت در برنامه ریزی خطی چیست؟
(از نظر مفهومی)

محـــدودیت بـــه معنـــای معـــین و محـــدود بـــودن منـــابعی اســـت کـــه بـــرای تولیـــد یـــا ... بـــا آن مواجهیم. مانند محدودیت مواد اولیه، نیروی انسانی و ...

منظور از محدودیت ها چیست؟

۱ ص ۲۶

محدودیت ها موانع ایجاد شده برای متغیرهای قابل کنترل و غیرقابل کنترل هستند.

محـــــدودیت عبارتســـــت از یـــــک ..... یـــــا ..... کـــه محـــدودیت هـــای مـــدل یـــا تصـــمیم گیرنـــده را جهـــت دســـتیابی بـــه ..... بیان می کند.

۱ ص ۳۲

معادله

نامعادله

اهداف مدل

می خواهیم مداد تولید کنیم، برای تولید هر واحد مداد ۲۰ سانتی متر چوب و ۱۰ گرم ذغال لازم داریم، کلاً ۱۰ متر چوب داریم و ۳ کیلو ذغال، محدودیت ها کدامند؟

۱۰ متر چوب

۳ کیلو ذغال

(چون فقط همین مقادیر رو از هر منبع داریم!)

در یک مسأله موجودی کالا، فضای تخصیص داده شده برای موجودی ها، یک ..... است.

۱ ص ۲۶

محدودیت

هر محدودیت چه علامت هایی ممکن است داشته باشد؟

۱۰ ص ۳۹

هر محدودیت ممکن است دارای یکی از سه علامت $\geq$ ، $\leq$ یا = باشد.

فرض کنید می توانیم محصول A یا B را تولید کنیم. منبعی به عنوان مواد اولیه وجود دارد که برای تولید هر واحد A دو واحد و برای B سه واحد از آن مصرف می شود. کل این ماده اولیه ۱۰۰ واحد است. محدودیت مربوطه را بنویسید؟

$$۲x_A + ۳x_B \leq ۱۰۰$$

استفاده از علامت $\leq$ به این معناست که کل استفاده از این منبع باید کمتر از ۱۰۰ واحد باشد.

می توانیم دو نوع مداد تولید کنیم، مقدار لازم از منابع برای تولید هر عدد مداد نوع اول و دوم در جدول زیر آمده است، محدودیت ها را بنویسید؟

کلاً ۱۰ متر چوب و ۳ کیلو ذغال موجودی داریم.

	مداد نوع اول	مداد نوع دوم
میزان استفاده از ذغال	۲ گرم	۴ گرم
میزان استفاده از چوب	۱۵ سانتی متر	۱۸ سانتی متر

$$\begin{cases} ۲x_۱+۴x_۲\leq ۳۰۰۰ \\ ۱۵x_۱+۱۸x_۲\leq ۱۰۰۰ \end{cases}$$

با توضیح زیر:

۳۰۰۰ گرم ذغال ≤ (تعداد تولید مداد دوم × ۴ گرم) + (تعداد تولید مداد اول × ۲ گرم)

۱۰۰۰ سانتیمتر چوب ≤ (تعداد تولید مداد دوم × ۱۸ سانتیمتر چوب) + (تعداد تولید مداد اول × ۱۵سانتیمتر چوب)

یا بصورت تعریف:

میزان استفاده از ذغال در تولید هر دو نوع مداد باید کمتر یا برابر کل موجودی ذغال ما باشد.

میزان استفاده از چوب در تولید هر دو نوع مداد باید کمتر یا برابر کل موجودی چوب ما باشد.

* اگر به نظرتان توضیح کافی نیست، عجله نکنید. ☺

در یک مدل برنامه ریزی خطی چند نوع پارامتر وجود دارد؟

۱۰ ص ۴۰

سه نوع

- پارامتر C_j که بیانگر ضرایب متغیرهای تصمیم در تابع هدف است.
- پارامتر b_i که بیانگر اعداد سمت راست محدودیت هاست.
- پارامتر a_{ij} که بیانگر ضرایب فنی یا ضرایب متغیرهای تصمیم در محدودیت ها می باشد.

حالا به کتابچه راهنما مراجعه کرده و بخش مربوط به **مدلسازی ریاضی** را مطالعه فرمایید.

قسمتی از مسأله ای به شکل زیر است، متغیر تصمیم چیست؟

اطلاعات هزینه تولید، سود و تقاضای سه نوع محصول داده شده است می خواهیم جهت حداکثرکردن سود، ترکیب بهینه ای از تولید ارائه دهیم.

محصول	A	B	C
هزینه	۵	۲	۳
سود	۲	۱	۲
تقاضا	۳۰	۱۰	۱۵

متغیر تصمیم میزان تولید از هر یک از سه محصول می باشد، چون می خواهیم در مورد تعداد تولید هر یک تصمیم بگیریم، یعنی:

x_A یا $x_۱$ = تعداد تولید از محصول A

x_B یا $x_۲$ = تعداد تولید از محصول B

x_C یا $x_۳$ = تعداد تولید از محصول C

برای مسأله زیر محدودیت ها را بنویسید؟

اطلاعات هزینه تولید، سود و تقاضای سه نوع محصول داده شده است. می خواهیم جهت حداکثر کردن سود، ترکیب بهینه ای از تولید ارائه دهیم. حداکثر بودجه تولیدی ما ۵۰ می باشد.

محصول	A	B	C
هزینه	۵	۲	۳
سود	۲	۱	۲
تقاضا	۳۰	۱۰	۱۵

ابتدا متغیرهای تصمیم را تعریف می کنیم:

x_1 = تعداد تولید از محصول A x_2 = تعداد تولید از محصول B

x_3 = تعداد تولید از محصول C

یک محدودیت برای هزینه های تولید به شکل زیر داریم:

۵۰≥ (تعداد تولید C× هزینه تولید یک واحد C)+(تعداد تولید B× هزینه تولید یک واحدB)+(تعداد تولیدA× هزینه تولید یک واحد A)

$$\Rightarrow 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 50$$

و سه محدودیت برای تقاضای هر محصول (چون طبیعتاً نمیخواهیم بیش از تقاضا تولید کنیم):

و سه شرط غیرمنفی بودن متغیرها نیز موجود است:

$$\begin{cases} x_1 \leq 30 \\ x_2 \leq 10 \\ x_3 \leq 15 \end{cases}$$

x_1 و x_2 و $x_3 \geq 0$

برای مسأله زیر محدودیت ها را بنویسید؟

اطلاعات هزینه تولید، سود و تقاضای سه نوع محصول داده شده است. می خواهیم جهت حداکثر کردن سود، ترکیب بهینه ای از تولید ارائه دهیم. حداکثر بودجه تولیدی ما ۵۰ می باشد.

همچنین می خواهیم به تقاضای محصول B بطورکامل پاسخ گفته شود.

محصول	A	B	C
هزینه	۵	۲	۳
سود	۲	۱	۲
تقاضا	۳۰	۱۰	۱۵

محدودیت هزینه

محدودیت های تقاضا

$$\begin{cases} ۵x_۱ + ۲x_۲ + ۳x_۳ \leq ۵۰ \\ x_۱ \leq ۳۰ \\ x_۲ = ۱۰ \\ x_۳ \leq ۱۵ \end{cases}$$

غیرمنفی بودن متغیرها

$x_۱$ و $x_۲$ و $x_۳ \geq ۰$

- چون می خواهیم تعداد تولید محصول $x_۲$ دقیقاً برابر با تقاضا باشد، در محدودیت دوم از علامت مساوی استفاده کردیم.

برای مسأله زیر محدودیت ها را بنویسید؟

اطلاعات هزینه تولید، سود و تقاضای سه نوع محصول داده شده است. می خواهیم جهت حداکثر کردن سود، ترکیب بهینه ای از تولید ارائه دهیم. حداکثر بودجه تولیدی ما ۵۰ می باشد و می خواهیم حداقل ۱۰ واحد از کالای B تولید کنیم.

محصول	A	B	C
هزینه	۵	۲	۳
سود	۲	۱	۲
تقاضا	۳۰	۱۰	۱۵

$$\begin{cases} ۵x_۱ + ۲x_۲ + ۳x_۳ \leq ۵۰ \\ X_۱ \leq ۳۰ \\ X_۲ \geq ۱۰ \\ X_۳ \leq ۱۵ \end{cases}$$

$$X_۱, X_۲, X_۳ \geq ۰$$

چون می خواهیم از کالای B حداقل ۱۰ واحد تولید شود محدودیت آنرا بصورت $X_۲ \geq ۱۰$ نوشتیم یعنی:

تعداد تولید کالای $B \geq ۱۰$

برای مسأله زیر تابع هدف را بنویسید؟

اطلاعات هزینه تولید، سود و تقاضای سه نوع محصول داده شده است. می خواهیم جهت حداکثر کردن سود، ترکیب بهینه ای از تولید ارائه دهیم.

محصول	A	B	C
هزینه	۵	۲	۳
سود	۲	۱	۲
تقاضا	۳۰	۱۰	۱۵

تابع هدف همانطور که بیان شده حداکثر سازی سود می باشد، یعنی:

Max Z =(تعداد تولید A× سود هر واحد A)+(تعداد تولیدB× سود هر واحدB)+(تعداد تولید C× سود هر واحد C)

$$\Rightarrow Max\ Z = ۲x_۱ + x_۲ + ۲x_۳$$

مسأله زیر را مدلسازی کنید؟

اطلاعات هزینه تولید، سود و تقاضای سه نوع محصول داده شده است. می خواهیم جهت حداکثر کردن سود، ترکیب بهینه ای از تولید ارائه دهیم. حداکثر بودجه تولیدی ما۵۰ واحد می باشد و می خواهیم تعداد کالای C حداقل ۵ واحد باشد.

محصول	A	B	C
هزینه	۵	۲	۳
سود	۲	۱	۲
تقاضا	۳۰	۱۰	۱۵

$$Max\ Z = ۲x_۱ + x_۲ + ۲x_۳$$

$$\begin{cases} ۵x_۱ + ۲x_۲ + ۳x_۳ \leq ۵۰ \\ X_۱ \leq ۳۰ \\ X_۲ \leq ۱۰ \\ X_۳ \leq ۱۵ \\ X_۳ \geq ۵ \end{cases}$$

$$X_۱, X_۲, X_۳ \geq ۰$$

$x_۱$ = تعداد تولید از محصول A

$x_۲$ = تعداد تولید از محصول B

$x_۳$ = تعداد تولید از محصول C

مسأله زیر را مدلسازی کنید؟

اطلاعات هزینه تولید، سود و تقاضای سه نوع محصول در جدول شماره ۱ داده شده است. برای تولید هر محصول از مواد ۱و۲و۳ استفاده می شود که اطلاعات آن به شرح جدول ۲ است. می خواهیم جهت حداکثر کردن سود، ترکیب بهینه ای از تولید ارائه دهیم. حداکثر بودجه تولیدی ما۵۰ واحد می باشد و می خواهیم تعداد کالای C حداقل ۵ واحد باشد.

محصول	A	B	C
هزینه	۵	۲	۳
سود	۲	۱	۲
تقاضا	۳۰	۱۰	۱۵

جدول (۱)

محصول / ماده مورد استفاده	A	B	C	کل موجودی از هر ماده اولیه
۱	۷	۹	۱۱	۳۰۰
۲	۱۳	۱۵	۶	۳۱۰
۳	۱۶	۱۲	۱۴	۷۰۰

جدول (۲)

$x_۱$ = تعداد تولید از محصول A
$x_۲$ = تعداد تولید از محصول B
$x_۳$ = تعداد تولید از محصول C

$$Max\ Z = ۲x_۱ + x_۲ + ۲x_۳$$

$$\begin{cases} ۵x_۱ + ۲x_۲ + ۳x_۳ \leq ۵۰ \\ X_۱ \leq ۳۰ \\ X_۲ \leq ۱۰ \\ X_۳ \leq ۱۵ \\ X_۳ \geq ۵ \\ ۷X_۱ + ۹X_۲ + ۱۱X_۳ \leq ۳۰۰ \\ ۱۳X_۱ + ۱۵X_۲ + ۶X_۳ \leq ۳۱۰ \\ ۱۶X_۱ + ۱۲X_۲ + ۱۴X_۳ \leq ۷۰۰ \end{cases}$$

محدودیت مربوط به ماده اولیه ۱
محدودیت مربوط به ماده اولیه ۲
محدودیت مربوط به ماده اولیه ۳

$$X_۱ , X_۲, X_۳ \geq ۰$$

یک شرکت تولیدی میز و صندلی از منابع چوب، پلاستیک و آهن برای تولیداتش استفـاده می کند. سود تولید میز ۱۴ واحد و صندلی ۹ است. میزان منابع مورد نیاز برای هر واحد تولید و موجودی هر واحد تولید و موجودی هر منبع در جدول زیر آمده است. همچنین دو کارگر روزی هشت سـاعت در این کارگاه کار می کنند. مسأله را جهت بدست آوردن ترکیب بهینه تولید با حداکثر سود مدلسـازی کنید؟

	چوب (سانتیمتر)	پلاستیک (سانتیمتر)	آهن (گرم)	زمان تولید (دقیقه)
میز	۱۸۰	۱۱۰	۳۵۰	۷۰
صندلی	۱۲۰	۹۰	۱۳۰	۴۵
موجودی	۵۰ متر	۶۰ متر	۸۰ کیلو گرم	

می خواهیم در مورد تعداد تولید میز و صندلی تصمیم گیری کنیم، پس دو متغیر تصمیم داریم:

x_1: تعداد تولید میز

x_2: تعداد تولید صندلی

تابع هدف حداکثرسازی سود است. پس داریم:

$$\text{Max } z = 14x_1 + 9x_2$$

چهار محدودیت به ازای چهار منبع تولیدی به شکل مقابل داریم:

$$\text{st:}\begin{cases} 180x_1 + 120x_2 \leq 5000 \\ 110x_1 + 90x_2 \leq 6000 \\ 350x_1 + 130x_2 \leq 80000 \\ 70x_1 + 45x_2 \leq 960 \end{cases}$$

وضعیت متغیرها: $x_1, x_2 \geq 0$

یک شرکت تولیدی میز و صندلی از منابع چوب، پلاستیک و آهن برای تولیداتش استفاده می کند. این شرکت در سه شیفت کار می کند و سود هر واحد تولید، زمان تولید و تعداد نیروی انسانی در هر شیفت فرق می کند. اطلاعات موردنیاز در جداول زیر داده شده اند. مسأله را مدلسازی کنید.

جدول (۱): جدول میزان سود

	شیفت اول	شیفت دوم	شیفت سوم
میز	۱۴	۱۲	۹
صندلی	۹	۸	۷

جدول (۲): منابع مورد استفاده

	چوب (سانتیمتر)	پلاستیک (سانتیمتر)	آهن (گرم)
میز	۱۸۰	۱۱۰	۳۵۰
صندلی	۱۲۰	۹۰	۱۳۰
موجودی در ۲۴ ساعت	۱۷۰ متر	۲۰۰ متر	۲۵۰ کیلو گرم

جدول (۳): زمان تولید در هر شیفت

	شیفت اول	شیفت دوم	شیفت سوم
میز	۷۰ دقیقه	۷۵	۹۲
صندلی	۴۵	۴۸	۵۳

جدول (۴): تعداد نیروی انسانی در هر شیفت

	شیفت اول	شیفت دوم	شیفت سوم
تعداد کارگر	۳ نفر	۳ نفر	۲ نفر

علیرغم پیچیدگی ظاهری مسأله، در واقع با مدل ساده ای مواجهیم، همواره به یاد داشته باشید که در مدلسازی مهمترین اصل «تعریف صحیح متغیرهای تصمیم» است. در این مدل باید در مورد تعداد تولید میز و صندلی در هر شیفت تصمیم بگیریم. پس متغیرهای تصمیم عبارتند از:

$x_{۱۱}$: تعداد تولید میز در شیفت اول
$x_{۱۲}$: تعداد تولید میز در شیفت دوم
$x_{۱۳}$: تعداد تولید میز در شیفت سوم
$x_{۲۱}$: تعداد تولید صندلی در شیفت اول
$x_{۲۲}$: تعداد تولید صندلی در شیفت دوم
$x_{۲۳}$: تعداد تولید صندلی در شیفت سوم

تابع هدف: $\text{Max } Z: ۱۴x_{۱۱}+۱۲x_{۱۲}+۹x_{۱۳}+۹x_{۲۱}+۸x_{۲۲}+۷x_{۲۳}$

محدودیت چوب:

«ادامه در فیش بعد»

$$
\text{st:}\begin{cases}
۱۸۰x_{۱۱}+۱۸۰x_{۱۲}+۱۸۰x_{۱۳}+۱۲۰x_{۲۱}+۱۲۰x_{۲۲}+۱۲۰x_{۲۳}\leq ۱۷۰۰۰ \\
\text{محدودیت پلاستیک:}\quad ۱۱۰x_{۱۱}+۱۱۰x_{۱۲}+۱۱۰x_{۱۳}+۹۰x_{۲۱}+۹۰x_{۲۲}+۹۰x_{۲۳}\leq ۲۰۰۰۰ \\
\text{محدودیت آهن:}\quad ۳۵۰x_{۱۱}+۳۵۰x_{۱۲}+۳۵۰x_{۱۳}+۱۳۰x_{۲۱}+۱۳۰x_{۲۲}+۱۳۰x_{۲۳}\leq ۲۵۰۰۰۰ \\
\text{محدودیت زمان تولید در شیفت اول:}\quad ۷۰x_{۱۱}+۴۰x_{۲۱}\leq ۱۴۴۰ \\
\text{محدودیت زمان تولید در شیفت دوم:}\quad ۷۵x_{۱۲}+۴۸x_{۲۱}\leq ۱۴۴۰ \\
\text{محدودیت زمان تولید در شیفت سوم:}\quad ۹۲x_{۱۳}+۵۳x_{۲۳}\leq ۹۶۰
\end{cases}
$$

وضعیت متغیرها: $x_{ij}\geq ۰ \quad (i=۱,۲),\ (j=۱,۲,۳)$

محدودیت اول را می شد بصورت زیر نوشت (همچنین محدودیت دوم و سوم):

$$۱۸۰(x_{۱۱}+x_{۱۲}+x_{۱۳})+۱۲۰(x_{۲۱}+x_{۲۲}+x_{۲۳})\leq ۱۷۰۰۰$$

حداقل تعداد راننده در یک آژانس مسافربری برای ساعات مختلف شبانه روز به صورت زیر است. هر راننده هشت ساعت متوالی کار می کند. هدف تعیین کمترین تعداد راننده ممکن در هر شیفت است. مسأله را جهت رسیدن به بهترین جواب مدلسازی کنید؟

ساعات شبانه روز	کمترین تعداد راننده موردنیاز
۲۴-۴	۲
۴-۸	۱۳
۸-۱۲	۹
۱۲-۱۶	۱۱
۱۶-۲۰	۸
۲۰-۲۴	۴

با توجه به اینکه شش شیفت داریم، شش متغیر تصمیم تعریف می کنیم که بیانگر تعداد راننده در آن شیفت است، (مثلاً $x_۱$: تعداد رانندگان در شیفت ۴-۲۴)، از اینرو داریم: $x_۱ , x_۲ , x_۳ , x_۴ , x_۵ , x_۶$

تابع هدف حداقل سازی تعداد رانندگان در همه ی شیفت هاست: $Min\ z = x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ + x_۶$

$$st:\begin{cases} x_۱ + x_۶ \geq ۲ \\ x_۱ + x_۲ \geq ۱۳ \\ x_۲ + x_۳ \geq ۹ \\ x_۳ + x_۴ \geq ۱۱ \\ x_۴ + x_۵ \geq ۸ \\ x_۵ + x_۶ \geq ۴ \quad xi \geq ۰ \ , (i=۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵ , ۶) \end{cases}$$

توضیح محدودیت ها: گفتیم هر راننده هشت ساعت حضور خواهد داشت، یعنی مثلاً در شیفت اول (۴-۲۴) هم رانندهایی حضور دارند که رأس ساعت ۲۴ آمده اند و هم آنهایی که ساعت ۲۰ آمده اند، و جمع این دو گروه باید بیشتر از ۲ باشد.

یک استخر پرورش ماهی روزانه نیاز به ۱۰ کیلوگرم غذا برای ماهی ها دارد. مقدار حداقل و حداکثری در برخی شاخصهای غذا در نظر گرفته شده که در جدول ۱ آمده و باید در غذای تولیدی وجود داشته باشد. برای تولید این غذا می توان از مواد اولیه موجود در جدول ۲ استفاده کرد. هر کدام این مواد اولیه دربرگیرنده مقادیر مشخصی از شاخصها هستند. برای کمینه کردن هزینه مدلسازی را انجام دهید؟ (مقادیر عددی هر دو جدول برحسب درصد است.)

جدول (۱)

شاخص	پروتئین	چربی	فیبر	ویتامین	نمکها و املاح
حداقل	۰/۱۸	۰/۲۰	۰/۴۰	۰/۰۴	۰/۰۴
حداکثر	۰/۴۰	۰/۳۰	–	–	–

جدول (۲) مقادیر شاخصها

	پروتئین	چربی	فیبر	ویتامین	نمکها و املاح	قیمت هر کیلوگرم
دل گاو	۰/۲۲	۰/۱۷	۰/۳	۰/۰۱	۰/۰۱	۲۵۰۰۰
پودر ماهی	۰/۳۰	۰/۰۴	۰/۰۷	۰/۰۳	۰/۰۹	۲۰۰۰۰
اسفناج	۰/۰۲	۰	۰/۳۲	۰/۰۷	۰/۰۶	۱۵۰۰
میگو	۰/۱۵	۰	۰/۰۹	۰/۰۲	۰/۲۵	۱۴۰۰۰
پودر غلات	۰/۱۱	۰	۰/۴۲	۰/۰۱	۰/۰۲	۹۰۰۰

چهار متغیر تصمیم داریم که هر یک بیانگر میزان استفاده از هر منبع برای تولید غذا است. (مثال: x۱ میزان استفاده از دل گاو در غذا) پس داریم: $x_۱ , x_۲ , x_۳ , x_۴ , x_۵$

$$\text{Min } z = ۲۵۰۰۰x_۱ + ۲۰۰۰۰x_۲ + ۱۵۰۰\, x_۳ + ۱۴۰۰۰x_۴ + ۹۰۰۰x_۵$$

$$\text{st:}\begin{cases} x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ = ۱۰ & \text{مقدار تولید غذا در روز} \\ ۰/۲۲x_۱ + ۰/۳x_۲ + ۰/۰۲x_۳ + ۰/۱۵x_۴ + ۰/۱۱x_۵ \geq (۰/۱۸\times۱۰) & \text{حداقل مقدار پروتئین} \\ ۰/۲۲x_۱ + ۰/۳x_۲ + ۰/۰۲x_۳ + ۰/۱۵x_۴ + ۰/۱۱x_۵ \leq (۰/۴\times۱۰) & \text{حداکثر مقدار پروتئین} \\ ۰/۱۷x_۱ + ۰/۰۴x_۲ \geq ۰/۲\times۱۰ & \text{حداقل مقدارچربی} \\ ۰/۱۷x_۱ + ۰/۰۴x_۲ \leq ۰/۲\times۱۰ & \text{حداکثر مقدار چربی} \\ ۰/۳x_۱ + ۰/۰۷x_۲ + ۰/۳۲x_۳ + ۰/۰۹x_۴ + ۰/۴۲x_۵ \geq (۰/\ ۴\times۱۰) & \text{حداقل فیبر} \\ ۰/۰۱x_۱ + ۰/۰۳x_۲ + ۰/۰۷x_۳ + ۰/۰۲x_۴ + ۰/۰۱x_۵ \geq (۰/۰۴\times۱۰) & \text{حداقل ویتامین} \\ ۰/۰۱x_۱ + ۰/۰۹x_۲ + ۰/۰۶x_۳ + ۰/۲۵x_۴ + ۰/۰۶x_۵ \geq (۰/۰۴\times۱۰) & \text{حداقل نمکها و املاح} \end{cases}$$

$$x_۱ , x_۲ , x_۳ , x_۴ , x_۵ \geq ۰$$

(ادامه در فیش بعد)

* مقدار هر Xi برحسب کیلوگرم است از اینرو مقدار درصد موجود در سمت راست محدودیت ها در عدد ۱۰ کیلوگرم ضرب شده است.

* فکر نمی کنم نیازی به توضیح بیشتر داشته باشد، در مدلسازی باید مسأله را به خوبی درک کنید تا مدل برای شما ملموس باشد.

یک تولید کننده گیاهان زینتی دارای سه گلخانه در محلات، کرج و ورامین است. چهار مشتری به او سفارش داده اند. هزینه حمل هر گلدان به مشتری ها و تعداد سفارش آنها و حداکثر موجودی هر گلخانه در جدول داده شده است. این مسأله را جهت ارسال سفارشات با کمترین هزینه حمل مدلسازی کنید.

مشتری / گلخانه	۱	۲	۳	۴	حداکثر موجودی هر گلخانه
محلات	۱۲	۸	۲	۶	۲۰۰۰
کرج	۳	۲	۹	۷	۱۵۰۰
ورامین	۳	۵	۱۱	۳	۱۲۰۰
تعداد تقاضا	۱۱۰۰	۲۵۰	۸۰۰	۹۵۰	

دوازده متغیر تصمیم تعریف می کنیم که هر یک بیانگر تعداد گلدان ارسالی از گلخانه i به مشتری j می باشد. $(x_{ij}\ , i = ۱\ , ۲,۳\ , j = ۱\ , ۲\ , ۳, ۴)$، داریم:

$$Min\ Z = ۱۲x_{۱۱} + ۸x_{۱۲} + ۲x_{۱۳} + ۶x_{۱۴} + ۲x_{۲۱} + \cdots + ۱۱x_{۳۳} + ۳x_{۳۴}$$

$$st \begin{cases} x_{۱۱} + x_{۱۲} + x_{۱۳} + x_{۱۴} \leq ۲۰۰۰ \\ x_{۲۱} + x_{۲۲} + x_{۲۳} + x_{۲۴} \leq ۱۵۰۰ \\ x_{۳۱} + x_{۳۲} + x_{۳۳} + x_{۳۴} \leq ۱۲۰۰ \\ x_{۱۱} + x_{۲۱} + x_{۳۱} = ۱۱۰۰ \\ x_{۱۲} + x_{۲۲} + x_{۳۲} = ۲۵۰ \\ x_{۱۳} + x_{۲۳} + x_{۳۳} = ۸۰۰ \\ x_{۱۴} + x_{۲۴} + x_{۳۴} = ۹۵۰ \end{cases}$$

$$(x_{ij} \geq ۰\ , i = ۱\ , ۲,۳\ \ ,\ j = ۱\ , ۲\ , ۳, ۴)$$

مدیر عامل یک شرکت پیشنهادهایی را جهت سرمایه گذاری بصورت جدول ارائه کرده است. همچنین شرکت سیاست هایی به صورت زیر دارد:

ریسک	درصد بازده سالانه	حداقل سرمایه (میلیون)	نوع سرمایه گذاری
۰/۰۲	۰/۲۱	۵	اوراق قرضه
۰/۰۷	۰/۲۵	۱	خرید ارز و طلا
۰/۰۳	۰/۲۳	۳۰	خرید املاک
۰/۱۱	۰/۳۴	۲	خرید سهام

۱) سرمایه گذاری در ارز و طلا نباید بیش از ده درصد سرمایه گذاریهای دیگر باشد.

۲) نسبت سرمایه گذاری در اوراق قرضه به مجموع املاک و سهام حداقل ۰/۴ باشد.

۳) ریسک مجموع سرمایه گذاریها حداکثر ۰/۰۹ باشد.

۴) کل مبلغ سرمایه گذاری بین ۴۰ الی ۷۰ میلیون باشد.

مدل را جهت انتخاب بهترین ترکیب سرمایه گذاری با بیشترین بازده فرموله کنید.

چهار متغیر تصمیم تعریف می کنیم و هر یک معرف یک نوع سرمایه گذاری هستند. داریم:

$$Max\ Z = ۰/۲۱x_۱ + ۰/۲۵x_۲ + ۰/۲۳x_۳ + ۰/۳۴x_۴$$

$$\begin{cases} x_۲ \leq ۰/۱\ (x_۱ + x_۳ + x_۴) \\ \frac{x_۱}{x_۳+x_۴} \geq ۰/۴ \\ ۰/۰۲x_۱ + ۰/۰۷x_۲ + ۰/۰۳x_۳ + ۰/۱۱x_۴ \leq ۰/۰۹\ (x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴) \\ x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ \geq ۴۰,۰۰۰,۰۰۰ \\ x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ \leq ۷۰,۰۰۰,۰۰۰ \end{cases}$$

$$x_۱ , x_۲ , x_۳ , x_۴ \geq ۰$$

یک شرکت تولید کننده لوازم آرایشی و بهداشتی در نظر دارد محصولات خود را تبلیغ نماید. مدیر بازاریابی شرکت، چهار روش به همراه اطلاعات مربوط به هر یک را مطابق جدول ۱ جمع آوری نموده است.

روش	تلویزیون		روزنامه	مجلات خانوادگی	بروشور (هر سری)
	قبل از سریال	ساعات عادی			
تعداد مردانی که تبلیغ را می بینند	۴۰۰,۰۰۰	۵۰,۰۰۰	۲۰۰۰,۰۰۰	۱,۰۰۰,۰۰۰	۲۰۰,۰۰۰
تعداد زنانی که تبلیغ را می بینند.	۷۰۰,۰۰۰	۱۰۰,۰۰۰	۱,۰۰۰,۰۰۰	۱۵۰۰,۰۰۰	۶۰۰,۰۰۰
هزینه هر بار تبلیغ	۵۰۰۰,۰۰۰	۱۰۰۰,۰۰۰	۲۰۰,۰۰۰	۱۵۰,۰۰۰	۵۰۰,۰۰۰

در این رابطه شرکت، سیاست هایی بصورت زیر دارد:

۱) حداقل ۴۰۰۰,۰۰۰ زن تبلیغ را ببینند.

۲) حداقل ۷۰۰۰,۰۰۰ نفر تبلیغ را ببینند.

۳) حداقل دو بار قبل از سریال تبلیغ پخش شود.

۴) مجموع تعداد تبلیغ روزنامه و مجله بین ۲۰ و ۳۰ باشد.

۵) تعداد سری تبلیغات بروشور از روزنامه بیشتر باشد.

۶) حداکثر ۱,۰۰۰,۰۰۰ تومان برای تبلیغ مجله هزینه شود.

این مسأله را به منظور حداقل سازی هزینه مدلسازی کنید.

متغیرهایی بصورت زیر تعریف می کنیم:

$x_۱$: تعداد تبلیغ در تلویزیون قبل از سریال $x_۲$: تعداد تبلیغ در تلویزیون در ساعات عادی

$x_۳$: تعداد تبلیغ در روزنامه $x_۴$: تعداد تبلیغ در مجلات خانواده

$x_۵$: تعداد سری بروشور چاپ شده

$$Min\ Z = ۵۰۰۰,۰۰۰x_۱ + ۱۰۰۰,۰۰۰x_۲ + ۲۰۰,۰۰۰x_۳ + ۱۵۰,۰۰۰x_۴ + ۵۰۰,۰۰۰x_۵$$

$$\begin{cases} ۷۰۰,۰۰۰x_۱ + ۱۰۰,۰۰۰x_۲ + ۱۰۰۰,۰۰۰x_۳ + ۱۵۰۰,۰۰۰x_۴ + ۶۰۰,۰۰۰x_۵ \geq ۴۰۰۰,۰۰۰ \\ ۱۱۰۰,۰۰۰x_۱ + ۱۵۰,۰۰۰x_۲ + ۳۰۰۰,۰۰۰x_۳ + ۲۵۰۰,۰۰۰x_۴ + ۸۰۰,۰۰۰x_۵ \geq ۷۰۰۰,۰۰۰ \\ x_۱ \geq ۲ \\ x_۳ + x_۴ \leq ۴۰ \\ x_۳ + x_۴ \geq ۳۰ \\ x_۵ \geq x_۳ \\ ۱۵۰,۰۰۰x_۴ \leq ۱۰۰۰,۰۰۰ \end{cases}$$

$$x_۱ , x_۲ , x_۳ , x_۴, x_۵ \geq ۰$$

یک پادگان نظامی در نظر دارد ترکیب بهینه ای از اقلام را برای محتویات کوله پشتی سربازان خود برنامه ریزی نماید. مجموع وزن این اقلام باید حداکثر ۱۴ کیلوگرم باشد. و همچنین موارد زیر در نظر گرفته شود.

اقلام	جیره غذایی	آب	کمکهای اولیه	مهمات	پتو	تجهیزات جانبی
وزن هر واحد از اقلام (گرم)	۸۰۰	۹۰۰	۲۵۰	۲۵۰۰	۲۰۰۰	۱۰۰۰
درجه نیاز هر کدام از اقلام (مطلوبیت)	۴	۸	۱	۱۰	۲	۳

۱) از هر کدام قلم حداقل ۱ واحد حمل شود.

۲) میزان واحدهای حمل آب حداقل برابر با غذا باشد.

۳) برای هر سرباز ۱ پتو کافی است.

۴) وزن مهمات هر سرباز کمتر از نصف وزن کل اقلان کوله او باشد.

مسأله را به منظور حداکثر سازی مطلوبیت مدلسازی کنید.

متغیر تصمیم x_i بیانگر هر کدام از اقلام و $x_i \ , i = ۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵ , ۶$

$$Max\ Z = ۴x_۱ + ۸x_۲ + x_۳ + ۱۰x_۴ + ۲x_۵ + ۳x_۶$$

$$\begin{cases} ۸۰۰x_۱ + ۹۰۰x_۲ + ۲۵۰x_۳ + ۲۵۰۰x_۴ + ۲۰۰۰x_۵ + ۱۰۰۰x_۶ \leq ۱۴۰۰۰ \\ x_۱ \geq ۱ \\ x_۲ \geq ۱ \\ x_۳ \geq ۱ \\ x_۴ \geq ۱ \\ x_۵ \geq ۱ \\ x_۶ \geq ۱ \\ x_۲ \geq x_۱ \\ x_۵ = ۱ \ \rightarrow \text{(حال که این محدودیت را نوشتیم، } x_۵ \geq ۱ \text{ را خط بزنید)} \\ ۲۵۰۰x_۴ \leq \frac{۱}{۲}(۸۰۰x_۱ + ۹۰۰x_۲ + ۲۵۰x_۳ + ۲۰۰۰x_۵ + ۱۰۰۰x_۶) \end{cases}$$

$$x_۱ , x_۲ , x_۳ , x_۴, x_۵, \ x_۶ \geq ۰$$

یک شرکت باربری هوایی با سفارش حمل چهار محموله روبروست و می تواند در مورد آنها تصمیم بگیرد. این شرکت دارای یک هواپیمای باربری است. این هواپیما دارای سه بخش عقب، وسط و جلو است که می توان در هر یک از آنها بارگیری کرد. مشخصات چهار محموله و ظرفیت بخشهای هواپیما به شکل جدول زیر است:

	ظرفیت هر قسمت	
	متر مکعب	تن
جلو	۲۵	۱۴
وسط	۴۵	۱۸
عقب	۳۲	۱۳

کل سفارش (واحد)	سود حمل هر واحد	حجم هر واحد از محموله (متر مکعب)	وزن هر واحد از محموله (تن)	نام محموله
۴۰	۱۱۰۰	۰/۴	۱/۲	A
۱۵	۵۰۰	۰/۹	۱/۱	B
۲۵	۷۶۰	۳/۶	۰/۷	C
۹	۹۰۰	۲/۴	۳	D

همچنین به منظور حفظ تعادل و سایر ملاحظات باید موارد زیر را هم در نظر گرفت:

۱) بیشترین وزن بار باید در قسمت وسط هواپیما بارگیری شود. (هم از جلو بیشتر باشد و هم از عقب)

۲) وزن بار قسمت جلو نباید کمتر از ۰/۳ مجموع بار قسمت وسط و عقب باشد.

۳) کاپیتان دستور داده است حداکثر از ۰/۸۰ ظرفیت وزن حمل بار توسط هواپیما استفاده شود.

۴) از سفارش B باید حداقل ۱۲ واحد حمل شود.

مسأله را به منظور بدست آوردن حداکثر سود مدلسازی کنید.

(جواب در فیش بعدی)

۱۲ متغیر x_{ij} بصورت «میزان حمل محموله i در قسمت j هواپیما» تعریف می کنیم، بعنوان مثال $x_{۱۱}$ یعنی میزان حمل محموله A در قسمت جلو و $x_{۳۲}$ یعنی میزان حمل محموله C در قسمت وسط و .... .

$$Max\ Z = ۱۱۰۰(x_{۱۱} + x_{۱۲} + x_{۱۳}) + ۵۰۰(x_{۲۱} + x_{۲۲} + x_{۲۳}) + ۷۶۰(x_{۳۱} + x_{۳۲} + x_{۳۳}) + ۹۰۰(x_{۴۱} + x_{۴۲} + x_{۴۳})$$

$$st \begin{cases} x_{۱۱} + x_{۱۲} + x_{۱۳} \leq ۴۰ \\ x_{۲۱} + x_{۲۲} + x_{۲۳} \leq ۱۵ \\ x_{۳۱} + x_{۳۲} + x_{۳۳} \leq ۲۵ \\ x_{۴۱} + x_{۴۲} + x_{۴۳} \leq ۹ \\ ۱/۲\, x_{۱۱} + ۱/۱\, x_{۲۱} + ۰/۷\, x_{۳۱} + ۳x_{۴۱} \leq ۱۴ \\ ۱/۲\, x_{۱۲} + ۱/۱\, x_{۲۲} + ۰/۷\, x_{۳۲} + ۳x_{۴۲} \leq ۱۸ \\ ۱/۲\, x_{۱۳} + ۱/۱\, x_{۲۳} + ۰/۷\, x_{۳۳} + ۳x_{۴۳} \leq ۱۳ \\ ۰/۴\, x_{۱۱} + ۰/۹\, x_{۲۱} + ۳/۶\, x_{۳۱} + ۲/۴\, x_{۴۱} \leq ۲۵ \\ ۰/۴\, x_{۱۲} + ۰/۹\, x_{۲۲} + ۳/۶\, x_{۳۲} + ۲/۴\, x_{۴۲} \leq ۴۵ \\ ۰/۴\, x_{۱۳} + ۰/۹\, x_{۲۳} + ۳/۶\, x_{۳۳} + ۲/۴\, x_{۴۳} \leq ۳۲ \end{cases}$$

$$st\begin{cases} ۱/۲\,x_{۱۲} + ۱/۱\,x_{۲۲} + ۰/۷\,x_{۳۲} + ۳x_{۴۲} \geq ۱/۲\,x_{۱۱} + ۱/۱\,x_{۲۱} + ۰/۷\,x_{۳۱} + ۳x_{۴۱} \\ ۱/۲\,x_{۱۲} + ۱/۱\,x_{۲۲} + ۰/۷\,x_{۳۲} + ۳x_{۴۲} \geq ۱/۲\,x_{۱۳} + ۱/۱\,x_{۲۳} + ۰/۷\,x_{۳۳} + ۳x_{۴۳} \\ ۱/۲\,x_{۱۱} + ۱/۱\,x_{۲۱} + ۰/۷\,x_{۳۱} + ۳x_{۴۱} \geq ۰/۳\,(۱/۲\,x_{۱۲} + ۱/۱\,x_{۲۲} + ۰/۷\,x_{۳۲} + ۳x_{۴۲} \\ \qquad + ۱/۲\,x_{۱۳} + ۱/۱\,x_{۲۳} + ۰/۷\,x_{۳۳} + ۳x_{۴۳}) \\ \qquad \text{(محدودیت های بند سوم را ننوشتم، به توضیح ۱ مراجعه کنید)} \\ x_B \geq ۱۲ \end{cases}$$

$$x_{\mathrm{ij}} \geq ۰\,, i = ۱\,,۲\,,۳\,,۴ \quad ,j = ۱\,,۲\,,۳$$

توضیح ۱: محدودیت های ۷ و ۶ و ۵ مدل مربوط به ظرفیت وزنی هستند، برای ملاحظه ۳، باید عیناً همان محدودیت ۷ و ۶ و ۵ را نوشت و اعداد سمت راست آنها را در ۰/۸ ضرب کرد یا اینکه به جای نوشتن مجدد آنها با اعداد سمت راست جدید، اعداد سمت راست همان سه محدودیت فوق را اصلاح نمود یعنی به جای ۱۴ نوشت: (۰/۸ × ۱۴) و ...

توضیح ۲:

محدودیت های اول تا چهارم مربوط به میزان کل سفارشات هستند.

محدودیت های پنجم تا هفتم مربوط به ظرفیت وزنی قسمت های مختلف هواپیما هستند.

محدودیت های هشتم تا دهم مربوط به ظرفیت حجمی قسمت های مختلف هواپیما هستند.

محدودیت های یازدهم و دوازدهم مربوط به ملاحظه ۱ هستند.

محدودیت های سیزدهم مربوط به ملاحظه ۲ است.

محدودیت چهارده و پانزده را قرار شد در محدودیت های قبل اعمال کنیم. (طبق توضیح ۱)

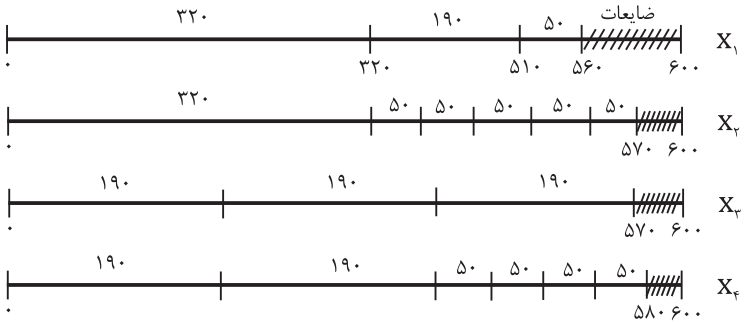
محدودیت شانزدهم مربوط به ملاحظه ۴ است.

یک آهنگر میلگردهایی به طول ۶ متر در اختیار دارد. سفارشی به شرح جدول زیر به او داده شده است. آهنگر می خواهد با ایجاد کمترین میزان ضایعات به سفارش پاسخگو باشد.

مسأله را به منظور پاسخگویی به سفارش و کمترین مقدار ضایعات فرموله کنید.

سفارش	طول cm	حداقل تعداد سفارش
۱	۳۲۰	۱۳۰
۲	۵۰	۴۶۰
۳	۱۹۰	۵۲

در این گونه مسأله ابتدا باید انواع برشهای ممکن را لیست کنیم. هر یک از انواع برش یک متغیر تصمیم می باشد، چهار برش زیر منطقی و امکانپذیرند:



داریم:

(ادامه در فیش بعد)

$$Min\ Z = ۴۰x_۱ + ۳۰x_۲ + ۳۰x_۳ + ۲۰x_۴$$

$$\begin{cases} x_۱ + x_۲ \geq ۱۳۰ \\ x_۱ + ۵x_۲ + ۴x_۴ \geq ۴۶۰ \\ x_۱ + ۳x_۳ + ۲x_۴ \geq ۵۲ \\ x_۱ , x_۲ , x_۳ \geq ۰ \end{cases}$$

توضیح: تابع هدف از مجموع حاصلضرب مقدار ضایعات هر نوع برش در آن نوع برش (متغیر تصمیم) به دست آمده. هر محدودیت مربوط به یک سفارش است و مثلاً برای محدودیت دوم داریم:

+ (تعداد برش نوع اول× تعداد برش ۵۰ سانتی در برش نوع اول)

+ (تعداد برش نوع دوم × تعداد برش ۵۰ سانتی در برش نوع دوم)

+ (تعداد برش نوع سوم× تعداد برش ۵۰ سانتی در برش نوع سوم)

(تعداد برش نوع چهارم× تعداد برش ۵۰ سانتی در برش نوع چهارم) ≥۴۶۰

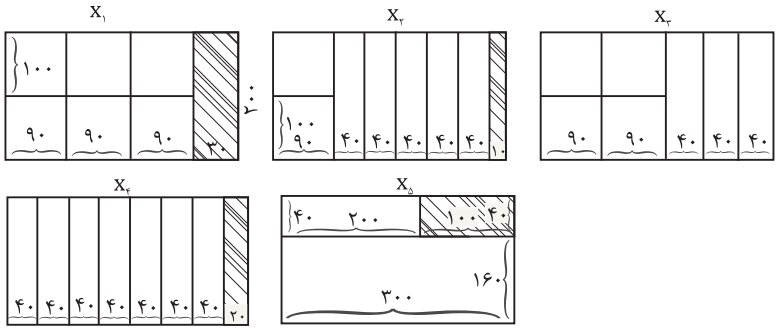
$$\Longrightarrow ۱x_۱ + ۵x_۲ + ۰x_۳ + ۲x_۴ \geq ۵۲$$

علامت بزرگتر مساوی به این جهت است که نمی خواهیم به هیچ سفارشی کمتر پاسخگو باشیم.

یک شرکت برش و پخش شیشه، سفارشی به شرح جدول زیر دریافت نموده است. ابعاد شیشه های ورودی شرکت ۳×۲ متر می باشد. شرکت شیشه ها را چگونه ببرد که کمترین میزان ضایعات را در بر داشته باشد؟

سفارش	ابعاد (cm)	حداقل تعداد سفارش
۱	۱۰۰×۹۰	۴۵
۲	۲۰۰×۴۰	۶۰
۳	۳۰۰×۱۶۰	۱۰

روشهای برش زیر امکانپذیرند، قسمت هاشور خورده هر یک ضایعات است، به هر روش برش یک متغیر تصمیم نسبت می دهیم:



(ادامه در فیش بعد)

* روشهای دیگری هم امکانپذیرند که یا مشابه همین موارد یا منطقی نیستند.

$$Min\ Z = (۳۰ \times ۲۰۰)x_۱ + (۱۰ \times ۲۰۰)x_۲ + (۰)x_۳ + (۲۰ \times ۲۰۰)x_۴ + (۴۰ \times ۱۰۰)x_۵$$

$$\begin{cases} ۶x_۱ + ۲x_۲ + ۴x_۳ \geq ۴۵ \\ ۵x_۲ + ۳x_۳ + ۷x_۴ + x_۵ \geq ۶۰ \\ x_۵ \geq ۱۰ \end{cases}$$

$$x_۲ , x_۲ , x_۳ , x_۴ , x_۵ \geq ۰$$

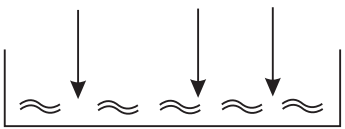
در مدل زیر که مدل پر شدن یک تانکر است، کدامیک از موارد زیر صحیح است؟

$a \leftarrow$ باران و شدت آن

$b \leftarrow$ سطح آب مخزن

$d \leftarrow$ حجم مخزن

$g \leftarrow$ نیروی جاذبه زمین



۱) همگی متغیرند.

۲) همگی پارامتر هستند.

۳) a و b متغیر $-$ d پارامتر $-$ g ثابت

۴) g و a و d متغیر $-$ b پارامتر

[آزاد، صنعتی، ۸۶]

گزینه ۳

a و b مقادیری انتخابی و قابل تغییر هستند پس متغیرند.(گرچه باران و شدت آن متغیر غیر قابل کنترل اند)

d در کل مسأله بدون تغییر باقی می ماند و پارامتر است.

g در هر حالی ثابت است.

حداکثر مبلغی که می توان در دو پروژه سرمایه گذاری کرد ۱۰ میلیون ریال می باشد و سرمایه گذاری در پروژه دوم، نباید از ۴۰٪ مجموع سرمایه گذاری در دو پروژه تجاوز کند، محدودیت های **مربوطه** را بنویسید؟

$X_۱$: میزان سرمایه گذاری در پروژه اول

$X_۲$: میزان سرمایه گذاری در پروژه دوم

محدودیت کل سرمایه گذاری: $X_۱ + X_۲ \leq ۱۰,۰۰۰,۰۰۰$

محدودیت نسبت سرمایه گذاری ها: $X_۲ \leq \frac{۴}{۱۰}(X_۱ + X_۲)$

و در نهایت: $X_۱$ و $X_۲ \geq ۰$

شرکتی در صدد حداقل کردن تعداد پرسنل خود می باشد.کل بودجه شرکت ۱۰۰۰ واحد می باشد.اگر هزینه پرسنلی در هر بخش C_i باشد. تابع هدف کدام است ؟

۱) $Minz = \sum_i C_i X_i + 1000$

۲) $Minz = \sum_i C_i$

۳) $Minz = \sum_i C_i$

۴) $Minz = \sum_i X_i$

[سراسری، مدیریت، ۷۶]

گزینه ۴

در سئوال گفته شده هدف ما حداقل کردن تعداد پرسنل است، پس هیچ کاری به هزینه ها نداریم.

نسبت فروش محصول x_1 به حاصل جمع فروش دو محصول x_2 و x_3 حداقل برابر ۰/۶۰ است. کدام گزینه مبین این خواسته است؟

۱) $x_1 - 0/6x_2 - 0/6x_3 \geq 0$

۲) $x_1 - 0/6x_2 - 0/6x_3 \leq 0$

۳) $x_1 - 0/6x_2 + 0/6x_3 \leq 0$

۴) $x_1 + 0/6x_2 + 0/6x_3 \geq 0$

[آزاد، بازرگانی، ۸۱]

گزینه ۱

عبارت داده شده را بصورت ریاضی می نویسیم:

$$\frac{x_۱}{x_۲+x_۳} \geq ۰/۶$$

چون گفته شده حداقل برابر ۰/۶، از علامت $\geq$ استفاده کردیم (اگر می گفت حداقل از $\leq$ و اگر می گفت برابر، از علامت = استفاده می کردیم) و بعد، آنرا به شکل خطی در می آوریم:

$$x_۱ \geq ۰/۶\,(x_۲ + x_۳) \Longrightarrow x_۱ - ۰/۶\,x_۲ - ۰/۶\,x_۳ \geq ۰$$

زمان لازم برای تولید هر واحد محصول x_1 نیم برابر محصول x_2 و دو برابر محصول x_3 است. اگر تمام وقت نیروی انسانی موجود صرف تولید x_2 شود، جمعاً می توان ۳۰۰ واحد از محصول x_2 تولید کرد. محدودیت مربوطه کدام است؟

۱) $x_1 + 2x_2 + \frac{1}{2}x_3 \leq 600$

۲) $x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 600$

۳) $2x_1 + x_2 + x_3 \leq 300$

۴) $x_1 + 2x_2 + \frac{1}{2}x_3 \leq 300$

[آزاد، بازرگانی، ۸۱]

گزینه ۱

سؤالهای مشابه این سؤال، در کنکور بسیار پرسابقه هستند، برای پاسخ گفتن به چنین سؤالاتی به شکل زیر عمل می کنیم، یعنی با استفاده از اطلاعات، محدودیت را مرحله به مرحله تکمیل می کنیم:

زمان لازم برای تولید هر واحد محصول x_1، نیم برابر محصول x_2 است،

x_2 و x_1 را نوشته و ضریب x_1 را نیم برابر x_2 قرار می دهیم، یعنی: $(\frac{1}{2}x_1 + x_2)$

زمان لازم برای تولید هر واحد x_1، دو برابر محصول x_3 است،

ضریب x_1 را نوشته ایم $(\frac{1}{2})$، این عدد باید دو برابر ضریب x_3 باشد، پس: $(\frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{4}x_3)$

اگر تمام وقت نیروی انسانی موجود، صرف تولید x_2 شود، جمعاً می توان ۳۰۰ واحد از محصول x_2 تولید کرد، چون ضریب x_2 در عبارت نوشته شده ۱ است، عدد ۳۰۰ را بدون تغییر در سمت راست معادله قرار می دهیم:

$$\frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{4}x_3 \leq 300$$

(ادامه در فیش بعد)

هیچ کدام از گزینه ها، مشابه معادله فوق نیست، یک معادله را می توانیم در هر عددی ضرب یا تقسیم کنیم، بدون اینکه در مفهوم آن تغییری ایجاد شود، اگر معـادله فوق را در عدد ۲ ضــرب کنیم، گزینه ۱ حاصــل می شود، یعنی:

$$۲(\frac{۱}{۲}x_۱ + x_۲ + \frac{۱}{۴}x_۳) \leq ۲(۳۰۰) \Longrightarrow x_۱ + ۲x_۲ + \frac{۱}{۲}x_۳ \leq ۶۰۰$$

پس گزینه ۱ صحیح است.

در یک مسئله برنامه ریزی تولید، اگر منابع تولید، تماماً صرف تولید محصول اول شود، می تواند ۱۰۰ واحـد از آن را تولید کند. اگر منابع مورد نیاز هر واحد محصول دوم، ثلث منابع مورد نیاز هر واحد محصول اول باشد، و X_j میزان تولید محصول j ام تعریف شود $(j = ۱ , ۲)$، چه محدودیتی می تواند معرف آن باشد؟

۱) $۳x_۱ + x_۲ \leq ۱۰۰$

۲) $x_۱ + ۳x_۲ \leq ۱۰۰$

۳) $x_۱ + ۳x_۲ \leq ۳۰۰$

۴) $۳x_۱ + x_۲ \leq ۳۰۰$

[سراسری، مدیریت، ۹۰]

گزینه ۴

توانایی تولید صد واحد محصول اول با منبع تولید: $x_1 \leq 100$

منابع مورد نیاز هر واحد محصول دوم ثلث منابع مورد نیاز هر واحد محصول اول باشد، یعنی باید با همین مقدار منبع و ($x_1 = 0$) بتوان ۳۰۰ واحد محصول x_2 تولید کرد. پس داریم:

$$x_1 + \frac{1}{3}x_2 \leq 100$$

این محدودیت را در هر عددی می توانیم ضرب کنیم (در ۳ ضرب کردیم تا عدد کسری درآن صحیح شود):

$$3x_1 + x_2 \leq 300$$

۱۲ نفر بایستی در اتاق های ۲ نفره و ۳ نفره مستقر شوند. تعداد کل اتاق ها ۴ عدد است. اگر A نمایان گر اتاق های دو نفره و B نمایان گر تعداد اتاق های ۳ نفره باشند. کدام محدودیت ها صحیح است؟

۱) $A + B \leq ۴$
$۲A + ۳B \geq ۱۲$

۲) $A + B \leq ۴$
$۳A + ۲B = ۱۲$

۳) $A.B \leq ۴$
$۲A + ۳B \leq ۱۲$

۴) $A + B \geq ۴$
$۳A + ۲B = ۱۲$

[آزاد، بازرگانی، ۸۷]

گزینه ۱

چون تعداد اتاق های A و B در مجموع ۴ است. داریم:

$$A + B \leq ۴ \quad \text{یا} \quad A + B = ۴$$

و در مورد ظرفیت، باید ۱۲ نفر (بیشتر هم برنامه ریزی شود مشکلی ندارد، اما کمتر نباید باشد) در اتاق ها قرار گیرند، اتاق A دو نفره و اتاق B هم ۳ نفره است:

$$۲A + ۳B \geq ۱۲$$

حداکثر اختلاف تعداد تولید دو محصول برابر عدد ۱۰ می باشد. محدودیت معادل مفهوم فوق کدام است؟

۱) $x_1 - x_2 = 10$

۲) $x_1 - x_2 \leq 10$

۳) $-10 \leq x_1 - x_2 \leq 10$

۴) $x_1 - x_2 \geq 10$

[آزاد، بازرگانی، ۸۳]

گزینه ۳

یعنی یا x_1 حداکثر ۱۰ واحد بزرگتر از x_2 است:

$$x_1 - x_2 \leq 10$$

و یا x_2 حداکثر ۱۰ واحد بزرگتر از x_1 است:

$$x_1 - x_2 \geq -10$$

و با لحاظ کردن هر دو عبارت بالا داریم:

$$-10 \leq x_1 - x_2 \leq 10$$

در یک مدل بایستی مبلغی از بودجه را در دو پروژه سرمایه گذاری کرد، بودجه این سرمایه گذاری معادل ۴۰ میلیون تومان است. سرمایه گذاری در پروژه اول نبایستی بیشتر از ۱۰ درصد تفاضل سرمایه گذاری در دو پروژه باشد. کدام محدودیت این مسأله را تبیین می کند؟

۱) $x_1 + x_2 \leq 40$

$x_1 \leq \frac{10}{100} | x_1 - x_2 |$

۲) $x_1 + x_2 \geq 40$

$x_1 \geq | x_1 - x_2 | \times 100$

۳) $x_1 \leq 40$

$x_2 \leq 40$

$x_1 + x_2 \geq \frac{10}{100} x_1$

۴) $x_1 + x_2 \geq \frac{10}{100}$

$x_1 + x_2 \leq 40$

[آزاد، بازرگانی، ۸۵]

گزینه ۱

در یک مدل بایستی مبلغی از بودجه را در دو پروژه سرمایه گذاری کرد، بودجه این سرمایه گذاری معادل ۴۰ میلیون تومان است. پس مجموع سرمایه گذاری در هر پروژه باید برابر یا کمتر از ۴۰ میلیون تومان باشد:

$$x_۱ + x_۲ \leq ۴۰$$

(تا همین جا، برای انتخاب گزینه صحیح کافی است)

سرمایه گذاری در پروژه اول نبایستی بیشتر از ۱۰ درصد تفاضل سرمایه گذاری در دو پروژه باشد:

$$x_۱ \leq ۰/۱۰ \, |x_۱ - x_۲|$$

$x_۱ - x_۲$ را در قدر مطلق قرار دادیم، چون مقدار تفاضل دو سرمایه گذاری مورد نظر بود و مهم نبود که مقدار سرمایه گذاری $x_۱$ بیشتر باشد یا $x_۲$.

شرکتی الوارهای با طول استاندارد ۱۲ متر را در طول های ۴ و ۵ متر برش می دهد. مدلی که تابع هدف آن حداقل سازی تعداد الوار مصرف شده باشد، چند محدودیت دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

[سراسری، مدیریت، ۸۰]

گزینه ۲

در این گونه مسائلی که به مدلهای برش معروف هستند، تعریف متغیرها کمی با مدلهای دیگر متفاوت است. در این مسائل انواع برشهای قابل انجام را بعنوان متغیرها درنظر می گیریم. این الوار را برای بدست آوردن قطعات ۴ و ۵ متری به سه شکل زیر می توان برش داد:

$X_1 \Leftarrow$: برش نوع اول	۴	۴	۴
$X_2 \Leftarrow$: برش نوع دوم	۵	۵	۲
$X_3 \Leftarrow$: برش نوع سوم	۵	۴	۳

برای تعداد لازم از برشهای ۴ و ۵ متری نیز دو محدودیت نوشته می شود، یعنی:

$$\begin{cases} 3X_1 + X_3 = b_1 \\ 2X_2 + X_3 = b_2 \end{cases}$$

*محدودیت اول مربوط به برش ۴متری است، از اینرو ضریب X_1 سه می باشد، ضریب X_2 صفر است چون هیچ قطعه ۴ متری در آن برش وجود ندارد و ضریب X_3 هم ۱ است.

تولید کننده ای رول های چسب تولید می کند. عرض این رول ها ۲۰ سانتیمتر می باشد و آنها را برحسب سفارش مشتری به عرض های مختلف برش داده و تحویل می دهد. اگر عرض درخواستی به ترتیب ۵، ۷ و ۹ باشد، کدام روش برش زیر صحیح نیست؟

۱) $\begin{bmatrix} ۴ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$

[آزاد، بازرگانی، ۸۲]

گزینه ۴

بررسی کردن گزینه ها ساده تر است.

$\begin{bmatrix} ۴ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$ یعنی اینکه یک عرض ۲۰ سانتی را به شکلی برش دهیم که ۴ برش ۵ سانتی، ۰ برش ۷ سانتی و ۰ برش ۹ سانتی در آن باشد، که امکانپذیر است.

گزینه های ۲ و ۳ هم امکان پذیرند.

در گزینه ۴، مجموع برشها از بیست بیشتر می شود که اشتباه است. یعنی یک برش ۵ سانتی و یک ۷ سانتی و یک ۹ سانتی، جمعاً ۲۱ می شود که از عرض رول بیشتر است.

در یک کارخانه تولیدی، هزینه تغییر سرعت تولید از پریود $i+۱$ (کاهش یا افزایش) به ازای هر واحد تولید برابر ۴ واحد پول می باشد. تابع هدف در چنین مسأله ای برای n پریود برابر است با:

۱) $Min\ z = \sum_{i=۱}^{n} ۴|x_i - x_{i+۱}|$

۲) $Max\ z = \sum_{i=۱}^{n} ۴|x_{i+۱} - x_i|$

۳) $Min\ z = \sum_{i=۱}^{n} ۴(x_i - x_{i+۱})$

۴) $Min\ z = \sum_{i=۱}^{n} ۴(x_{i+۱} - x_i)$

[سراسری، مدیریت، ۸۲]

گزینه ۱

افزایش یا کاهش سرعت، هر دو باعث ایجاد هزینه ی ۴ واحدی می شود، از اینرو $(x_i - x_{i+1})$ که بیانگر تغییر در سرعت است را در قدرمطلق قرار می دهیم و عدد ۴ ضریب آن می باشد. طبیعی است که بخواهیم هزینه این تغییر سرعت را حداقل سازی کنیم، از اینرو تابع هدف Min Z می باشد، پس داریم:

$$Min\ z = \sum_{i=1}^{n} 4|x_i - x_{i+1}|$$

* گاهی اوقات گزینه های سؤال ترسناک هستند، ولی با یک تحلیل ساده و کمی دقت می توان آن مسأله را حل کرد.

اگر بخواهیم محصولاتی را از محل سه انبار ۱ و ۲ و ۳ به سه فروشگاه A وB و C ارسال کنیم ، به شرط آنکه موجودی انبارها ۵۰۰ واحد ، اما نیاز فروشگاهها ۴۲۰ واحد باشد، این مدل چند محدودیت با چه علاماتی دارد؟

۱) ۶ محدودیت با علامت=

۲) سه محدودیت عرضه با علامت $\leq$ و سه محدودیت تقاضا با علامت =

۳) سه محدودیت عرضه با علامت $\geq$ و سه محدودیت تقاضا با علامت =

۴) سه محدودیت عرضه با علامت = و سه محدودیت تقاضا با علامت $\geq$

[سراسری، مدیریت، ۸۲]

گزینه ۲ چون میزان عرضه از میزان تقاضا بیشتر است، محدودیت های تقاضا دارای علامت = خواهند بود، زیرا می توان تمام تقاضا را جواب داد، اما محدودیت های عرضه باید دارای علامت کوچکتر مساوی باشند.

اگر X_{ij} را بعنوان متغیر تصمیم بصورت مقابل تعریف کنیم(X_{ij} تعداد محصول ارسالی از انبار i به فروشگاه j)و(i=۱,۲,۳)و(j= A,B,C)

$$\begin{cases} X_{۱A} + X_{۱B} + X_{۱C} \leq ۵۰۰ \\ X_{۲A} + X_{۲B} + X_{۲C} \leq ۵۰۰ \\ X_{۳A} + X_{۳B} + X_{۳C} \leq ۵۰۰ \\ X_{۱A} + X_{۲A} + X_{۳A} = ۴۲۰ \\ X_{۱B} + X_{۲B} + X_{۳B} = ۴۲۰ \\ X_{۱C} + X_{۲C} + X_{۳C} = ۴۲۰ \end{cases}$$

*درفصول بعدی، چنین مدلهایی را تحت عنوان مدلهای حمل و نقل خواهید خواند.

از دو نوع نفت تصفیه داخلی و خارجی، دو نوع بنزین نوع R و P تولید می شود. ماکزیمم فشار بخار و می نیمم درجه اکتان موجود در نفت ها و مورد نیاز در بنزین ها در هر بشکه در جدول زیر داده شده است. اگر میزان مصرف نفت در تولید بنزین مطابق جدول زیر بر حسب هر بشکه باشد، میزان درجه اکتان مورد نیاز در بنزین نوع R چقدر است؟

	ماکزیمم فشار بخار	مینیمم درجه اکتان
نفت داخلی	۲۰	۷۸
نفت خارجی	۱۸	۸۹
بنزین نوع R	۲۴	۸۵
بنزین نوع P	۲۲	۹۶

بنزین / نفت	R	P
داخلی	X_1	X_3
خارجی	X_2	X_4

۱) $7x_1 - 4x_2 \leq 0$

۲) $7x_1 - 4x_2 \geq 0$

۳) $7x_1 + 8x_2 \geq 0$

۴) $7x_1 + 8x_2 \leq 0$

[سراسری، مدیریت، ۸۷]

گزینه ۱

اطلاعات مورد نیاز این سوال بطور خلاصه به شکل زیر است، حال باید محدودیت ها را طوری بنویسیم که بیانگر این موضوع باشد که «حداقل درجه اکتان در بنزین نوع R، ۸۵ است»:

R	بنزین / نفت
X_1	داخلی
X_2	خارجی

می نیمم درجه اکتان	نفت
۷۸	داخلی
۸۹	خارجی

$$۷۸x_1 + ۸۹x_2 \geq ۸۵(x_1 + x_2) \Longrightarrow ۷x_1 - ۴x_2 \leq ۰$$

در طرح توسعه یک موسسه، احداث حداقل تعداد انبارها (X_i) مورد توجه است. در صورتی که بودجه کل این موسسه A واحد پولی و هزینه احداث انبار i ام، a_i باشد، تابع هدف کدام است؟

۱) $Min\ Z = \sum_i xi$

۲) $Min\ Z = \sum_i a_i x_i$

۳) $Min\ Z = \sum_i a_i x_i + A$

۴) $Min\ Z = \sum_i (a_i + A) x_i$

[سراسری، مدیریت، ۸۵]

گزینه ۱

همانطور که در صورت سوال گفته شده، هدف حداقل کردن تعداد انبارها (X_i) است و هزینه و بودجه اطلاعات اضافی هستند، پس داریم:

$$Min\ Z = \sum_i xi$$

* سؤال هایی که دارای گزینه های ترسناک هستند معمولاً بسیار ساده می باشند و در بسیاری از مواقع، تنها با استفاده از بخشهایی از گزینه ها، همانند متغیرها یا اندیس آنها، می توان به سؤال پاسخ گفت.

در یک مدل برنامه ریزی تولید برای شش ماه، امکان تولید در دو شیفت عادی و اضافه کاری وجود دارد. تولیدات هر ماه می تواند در همان ماه به فروش رسیده یا در ماههای بعد به فروش برسد. متغیر X_{ijk} مقدار تولید را با توجه به $i = ۱, ۲, ..., ۶$ ماه تولید، ۲ و ۱ = j شیفت تولید و $k = ۱, ۲, ..., ۶$ ماه فروش را نشان می دهد. کدامیک از متغیرهای زیر برای این مدل صحیح است؟

۱) $x_{۱۳۴}$ ۲) $x_{۲۱۱}$ ۳) $x_{۳۱۴}$ ۴) $x_{۳۲۱}$

[سراسری، مدیریت، ۷۹]

گزینه ۳ X_{ijk}

$i=(۱ , ۲ , ... , ۶)$, $j=(۱,۲)$, $k= (۱ , ۲ , ... , ۶)$

در گزینه ۱ چون j=۳ است اشتباه است.

گزینه ۲ چون ماه فروش یک است (k=۱) اما ماه تولید ۲ است (i=۲) و این قضیه منطقاً امکان پذیر نیست اشتباه می باشد.

در گزینه ۳ هیچ مشکلی وجود ندارد و صحیح می باشد.

گزینه ۴ هم مانند گزینه ۲ دارای اشتباه است.

توضیح بیشتر: یعنی ماه تولید (i) باید قبل از ماه فروش (k) باشد، چون اول باید بسازیم بعد بفروشیم!
متغیر j هم که شیفت است و فقط می تواند ۱ یا ۲ باشد.

* فکرش را بکنید، جواب دادن به همچین تستی یعنی بیش از ۳ درصد این درس در کنکور، فقط کمی آرامش، کمی دقت!

تولید کننده ای که به ساختن دو محصول شماره ۱ و ۲ مشغول است، می خواهد برنامه ی تولید خود را طوری تنظیم نماید که میزان تولید از محصول اول حداقل دو برابر محصول دوم باشد؛ در عین حالی که می داند تقاضا برای محصول دوم بیش از ۲۰ واحد نیست؛ لیکن تعهد کرده است که حداقل ۱۵ واحد از این محصول را تولید نماید کدام محدودیت ها بیانگر این مسأله هستند؟

۱) $۱۵ \leq x_۲ \leq ۲۰ , x_۱ - ۲x_۲ \geq ۰$

۲) $x_۲ = ۱۵ , x_۲ \leq ۲۰ , x_۱ - ۲x_۲ \geq ۰$

۳) $۱۵ \leq x_۲ \leq ۲۰ , x_۱ - ۲x_۲ = ۰$

۴) $x_۲ \leq ۱۵ , x_۲ = ۲۰ , \frac{۱}{۲}x_۱ - x_۲ \geq ۰$

[سراسری، مدیریت، ۷۹]

گزینه ۱

ابتدا تعریف متغیرهای تصمیم

x_1: تعداد تولید از محصول شماره ۱

x_2: تعداد تولید از محصول شماره ۲

میزان تولید از محصول اول حداقل دو برابر محصول دوم باشد:

$$x_1 \geq 2x_2 \quad \rightarrow \quad x_1 - 2x_2 \geq 0$$

باید حداقل ۱۵ واحد از محصول دوم تولید کند (چون تعهد کرده است) و باید تولید همین محصول کمتر از ۲۰ باشد (چون بیشتر از آن تقاضا نیست)

$$15 \leq x_2 \leq 20$$

پس گزینه ۱ صحیح است.

مبلغی که حداکثر می توان در دو پروژه سرمایه گذاری کرد ۳۰ میلیون ریال می باشد. سرمایه گذاری در پروژه دوم باید از ۵۰ ٪ مجموع سرمایه گذاری در دو پروژه تجاوز کند معادلات خطی کدامند؟

۱) $x_۲ \leq ۰/۵۰ (x_۱ + x_۲) \quad x_۱ + x_۲ \leq ۳۰$

۲) $x_۲ \leq ۰/۵۰ (x_۱ + x_۲) \quad x_۱ + x_۲ = ۳۰$

۳) $x_۲ \geq ۰/۵۰ x_۱ \quad x_۱ + x_۲ \leq ۳۰$

۴) $x_۲ \leq ۰/۵۰ (x_۱ + x_۲) \quad x_۱ + x_۲ = ۳۰$

[سراسری، مدیریت، ۷۸]

متغیر $X_۲$ و $X_۱$ را بعنوان مقدار سرمایه گذاری در پروژه های اول و دوم تعریف می کنیم.

مبلغی که حداکثر می توان در دو پروژه سرمایه گذاری کرد ۳۰ میلیون ریال می باشد:

[یعنی جمع دو مبلغ کوچکتر یا مساوی ۳۰ میلیون ریال است]

$$x_۱ + x_۲ \leq ۳۰$$

سرمایه گذاری در پروژه دوم نباید از ۵۰٪ مجموع سرمایه گذاری در دو پروژه تجاوز کند:

$$x_۲ \leq ۰/۵(x_۱ + x_۲)$$

پس گزینه ۱ صحیح است.

یک شرکت تبلیغاتی مایل است یک برنامهٔ تبلیغاتی را از طریق تلویزیون، رادیو و مجله به اجرا درآورد. در صورتی که هدف از ارائه این برنامه جذب حداکثر مشتریان بالقوه شرکت متقاضی باشد، با توجه به اطلاعاتی که در این مورد در جدول زیر ارائه شده است تابع هدف این مسأله را طرح کنید.

نوع آگهی / مشتریان	آگهی تلویزیونی	آگهی رادیویی	آگهی در مجله
تعداد مردان قابل جذب	۵۰۰,۰۰۰	۳۰۰,۰۰۰	۱۰۰,۰۰۰
تعداد زنان قابل جذب	۴۰۰,۰۰۰	۲۰۰,۰۰۰	۱۰۰,۰۰۰
هزینه هر بار تبلیغ	۱۵۰,۰۰۰	۶۰,۰۰۰	۳۰,۰۰۰

۱) $Minz = ۱۵۰,۰۰۰x_۱ + ۶۰,۰۰۰x_۲ + ۳۰,۰۰۰x_۳$

۲) $Maxz = ۴۰۰,۰۰۰x_۱ + ۲۰,۰۰۰x_۲ + ۱۰۰,۰۰۰x_۳$

۳) $Maxz = ۵۰۰,۰۰۰x_۱ + ۳۰,۰۰۰x_۲ + ۱۰۰,۰۰۰x_۳$

۴) $Maxz = ۹۰۰,۰۰۰x_۱ + ۵۰۰,۰۰۰x_۲ + ۲۰۰,۰۰۰x_۳$

[سراسری، مدیریت، ۷۸]

گزینه ۴

ابتدا متغیرهای تصمیم را تعریف می کنیم:

x_1: آگهی تلویزیونی

X_2: آگهی رادیویی

X_3: آگهی در مجله

چون می خواهیم در مورد تعداد هر نوع از آگهی ها تصمیم بگیریم.

با توجه به اینکه هدف، جذب حداکثر مشتریان می باشد، تعداد مشتریان زن و مرد برای هر نوع آگهی را با هم جمع کرده و بعنوان ضریب متغیرهای تصمیم استفاده می کنیم،

در نتیجه:

$$\text{Max } Z = (۵۰۰,۰۰۰+۴۰۰,۰۰۰)X_1+(۳۰۰,۰۰۰+۲۰۰,۰۰۰)\ X_2+(۱۰۰,۰۰۰+۱۰۰,۰۰۰)\ X_3$$

$$\Longrightarrow \text{Max } Z = ۹۰۰,۰۰۰\ X_1+۵۰۰,۰۰۰\ X_2+۲۰۰,۰۰۰\ X_3$$

❋ در مسائل مدلسازی، درک صورت سؤال، تمام جواب است.

به منظور تعادل در پرواز، در دو قسمت جلو و عقب هواپیما بار نگهداری می شود. مقدار باری کـه در قسمت جلو باید قرار داد $\frac{۲}{۳}$ مقدار باری است که در قسمت عقب بایـد باشـد و حـداکثر وزن بـار۵۰۰ کیلوگرم است، محدودیت مربوطه کدام است؟

$x_۱ =$ بار در قسمت جلو

$x_۲ =$ بار در قسمت عقب

۱) $x_۱ - \frac{۲}{۳}x_۲ = ۰$ و $x_۱ + x_۲ \leq ۵۰۰$

۲) $x_۱ + \frac{۲}{۳}x_۲ \leq ۵۰۰$

۳) $\frac{۲}{۳}x_۱ + x_۲ \leq ۵۰۰$

۴) $-x_2 = ۰$ و $x_۱ + x_۲ \leq ۵۰۰$

[آزاد، بازرگانی، ۸۲] و [سراسری، مدیریت، ۷۷]

گزینه ۱

مقدار باری که در قسمت جلو باید قرار داد $\frac{۲}{۳}$ مقدار باری است که در قسمت عقب باید باشد:

$$x_۱ = \frac{۲}{۳}x_۲ \quad \rightarrow \quad x_۱ - \frac{۲}{۳}x_۲ = ۰$$

این عبارت دربردارنده ی نسبت وزن عقب و جلو هواپیماست، از اینرو برای تعیین حداکثر وزن قابل حمل این محدودیت را هم اضافه می کنیم.

$$x_۱ + x_۲ \leq ۵۰۰$$

زمان لازم برای تولید هر واحد از محصول A نیم برابر محصول B و دو برابر محصول C است. اگر کل زمان دسترس نیروی انسانی در روز صرف تولید محصول B شود، می توان ۲۰۰ واحد از محصول B ساخت. با فرض اینکه A، B و C تعداد تولید هر یک از محصولات را نشان دهد، محدودیت معادل عبارت فوق کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}A + B + ۲C \leq ۲۰۰$

۲) $A + \frac{۱}{۲}B + ۲C \leq ۲۰۰$

۳) $A + ۲B + ۴C \leq ۸۰۰$

۴) $۲A + ۴B + C \leq ۸۰۰$

[سراسری، مدیریت، ۸۶]

گزینه ۴

$$\frac{۱}{۲}\mathrm{A}+\mathrm{B} \rightarrow \frac{۱}{۲}\mathrm{A}+\mathrm{B}+\frac{۱}{۴}C \rightarrow \frac{۱}{۲}\mathrm{A}+\mathrm{B}+\frac{۱}{۴}C \leq ۲۰۰$$

زمان لازم برای تولید هر واحد از محصول A نیم برابر محصول B

و دو برابر محصول C است.

اگر کل زمان صرف محصول B شود می توان ۲۰۰ واحد B تولید کرد.

می دانیم که می توان محدودیت را در هر عددی ضرب کرد بدون آنکه مفهوم آن تغییر یابد.

$$۴ \times \text{محدودیت} \Longrightarrow ۲A+۴B+C \leq ۸۰۰$$

نوعی از بنزین از ترکیب دو نوع نفت خام تهیه می شود، مقدار اکتان موجود در این نفت ها به ترتیب برابر ۱۱ و ۶ است. در صورتی که لازم باشد سطح اکتان در بنزین حداقل برابر ۹ باشد، کدام یک از محدودیت های زیر صحیح است؟ ($x_۲$ و $x_۱$ عبارتند از مقدار نفت خام ۱ و ۲ که در تولید بنزین استفاده می شود.)

۱) $۲x_۱ - ۳x_۲ \geq ۰$

۲) $۲x_۱ - ۳x_۲ \leq ۰$

۳) $۳x_۱ - ۲x_۲ \geq ۰$

۴) $۲x_۱ - ۳x_۲ = ۰$

[سراسری، مدیریت، ۸۹]

گزینه ۱

$$۱۱x_۱ + ۶x_۲ \geq ۹(x_۱ + x_۲) \Longrightarrow ۲x_۱ - ۳x_۲ \geq ۰$$

[(مقدار بنزین تولید شده) × (اکتان مورد نظر)] ≤ [(مقدار نفت ۲) × (اکتان نفت ۲)] + [(مقدار نفت ۱) × (اکتان نفت ۱)]

با در نظر گرفتن x_1 و x_2 برای دو فعالیت در یک مسئله برنامه ریزی خطی، کدام وضعیت مبین شرایط زیر است؟

الف) میزان فعالیت x_1 حداقل ۵ برابر x_2 باشد.

ب) حداقل ۴۰ واحد از این دو فعالیت انجام پذیرد.

ج) میزان فعالیت x_1 به کل فعالیت ها حداکثر ۵۰ درصد باشد.

۱) $x_1 \geq 5x_2 \quad 0/5x_1 - 0/5x_2 \leq 0 \quad x_1 + x_2 \geq 40$

۲) $x_1 \leq 5x_2 \quad 0/5x_1 + 0/5x_2 \geq 0 \quad x_1 + x_2 = 40$

۳) $x_1 \leq 5x_2 \quad 0/5x_1 - 0/5x_2 \geq 0 \quad x_1 + x_2 \geq 40$

۴) $x_1 \leq 5x_2 \quad 0/5x_1 - 0/5x_2 \leq 0 \quad x_1 + x_2 \geq 40$

[سراسری، مدیریت، ۸۹]

گزینه ۱

شرط الف و ب که هیچی. برای شرط ج:

$$\frac{x_1}{x_1+x_2} \leq \frac{1}{2} \rightarrow 2x_1 \leq x_1 + x_2 \implies x_1 - x_2 \leq 0$$

* هر محدودیت را می توان در هر عددی ضرب نمود بدون آنکه مفهوم آن تغییر یابد. محدودیت فوق نیز اگر در $\frac{1}{2}$ ضرب شود داریم:

$$\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \leq 0$$

در این قسمت، با حالتی خاص از مدلسازی ریاضی آشنا می شویم، مدل ساخته شده در این قسمت در واقع خطی محسوب نمی شود، اما با تغییری کوچک آنرا به مدل خطی تبدیل می نمائیم. به فیش بعد توجه فرمائید.

یک محصول از مونتاژ دو قطعه ی A , B ساخته می شود، در صورتی که Z مقدار تولید این محصول و X_A , X_B مقدار تولید این دو قطعه باشند، تابع هدف این مسأله چگونه است؟

هدف حداکثر کردن مقدار محصول یعنی Z است اما وقتی Z تولید می شود که هر دو قطعه A , B موجود باشند، از طرفی می خواهیم که Z با کمترین مقدار از A, B ساخته شود:

$$Max\ Z = Min\ \{x_A\ , x_B\}$$

توجه داشته باشید که این تابع هدف خطی نیست.

یک محصول از مونتاژ دو قطعه A و B ساخته می شود. در صورتی که Z مقدار تولید این محصول و X_A و X_B مقدار تولید این دو قطعه باشد، تابع هدف مدل این مسأله به چه صورت است؟

۱) $Max\ Z = x_A + x_B$

۲) $Max\ Z = Min\ \{x_A\ , x_B\}$

۳) $Max\ Z = Min\ \{x_A + x_B\}$

۴) $Min\ Z = Max\{x_A\ , x_B\}$

[سراسری، مدیریت، ۷۷]

گزینه ی ۲

هدف مسأله حداکثر کردن تولید Z است و منطقی است که بخواهیم با کمترین استفاده از X_A و X_B به تولید محصول بپردازیم، در نتیجه:

$$\text{Max } Z = \text{Min } \{ X_A , X_B \}$$

محصول α از چهار واحد از قطعه A و سه واحد از قطعه B تشکیل می شود. به منظور حداکثر سازی تعداد تولید محصول مدل مناسب را بسازید؟

* متغیرهای تصمیم را x_A و x_B بنامید.
* منطقی است که می خواهیم حداکثر تولید با حداقل استفاده از قطعات B و A صورت پذیرد.
* اطلاعات داده شده فقط برای نوشتن تابع هدف کافی است، که برای مسأله فوق مدل کامل محسوب می گردد.

$$Max\ Z: Min\ \left\{\frac{x_A}{۴}\ ,\frac{x_B}{۳}\right\}$$

حداکثرسازی تولید محصول (Max z) با استفاده از حداقل (Min) تعداد قطعه A و B،($\frac{x_A}{۴}$) و ($\frac{x_B}{۳}$)

* توجه داشته باشید که به ازای چهار x_A و سه x_B یک واحد محصول ساخته می شود، از اینرو متغیر تصمیم آنها را بر چهار و سه تقسیم نمودیم.

یک محصول از مونتاژ ۲ قطعه A و ۳ قطعه B ساخته می شود. در صورتی که z مقدار تولید این محصول و x_A و x_B مقدار تولید این دو قطعه باشد، تابع هدف این مسأله کدام است؟

۱) $Max\ z = ۲x_A + ۳x_B$

۲) $Max\ z = Min\left\{\frac{x_A}{۲} + \frac{x_B}{۳}\right\}$

۳) $Max\ z = Min\left\{۲x_A ، ۳x_B\right\}$

۴) $Max\ z = Min\left\{\frac{x_A}{۲} ، \frac{x_B}{۳}\right\}$

[آزاد، بازرگانی، ۸۲]

گزینه ۴

ما می خواهیم حداکثر Z را تولید کنیم در حالی که از x_A و x_B حداقل استفاده را کنیم، پس می نویسیم:

$$Max\ z = Min\ (x_A\ , x_B)$$

اما چون گفته شده یک محصول، از مونتاژ ۲ قطعه A و ۳ قطعه B ساخته می شود، تابع هدف را به شکل زیر تکمیل می کنیم:

$$Max\ z = Min\ (\frac{x_A}{۲}\ , \frac{x_B}{۳})$$

* دلیل این کار آنست که ۲ واحد x_A و ۳ واحد x_B، تشکیل ۱ واحد Z را می دهند، یعنی:

$$\left(\frac{۲x_A}{۲}\ , \frac{۳x_B}{۳}\right) = (x_A\ , x_B) = Z$$

محصول α از چهار واحد از قطعه A و سه واحد از قطعه B تشکیل می شود. قطعات B و A از دو ماده خام مختلف که از آنها به ترتیب ۱۰۰ واحد و ۲۰۰ واحد موجود است، ساخته می شوند. سه بخش امر تولید را به عهده دارند و هر بخش با استفاده از روش خاص خود با مصرف مقدار متفاوتی از مواد اولیه، در هر دور تولید تعداد خاصی از قطعات A و B را تولید می کند (اطلاعات جدول).

مسأله را به منظور حداکثر تولید محصول α با کمترین میزان استفاده از دورهای تولیدی فرموله کنید.

بخش	ماده مصرف شده در هر دور		تعداد تولید قطعات در هر دور	
	ماده خام ۱	ماده خام ۲	قطعه A	قطعه B
۱	۸	۶	۷	۵
۲	۵	۹	۶	۹
۳	۳	۸	۸	۴

* مثال از منبع ۱۱ صفحه ۳۲ نقل شده است.

سه متغیر تصمیم به نامهای $x_۳$ و $x_۲$ و $x_۱$ تعریف می کنیم که هر یک نماینده تعـداد دورهای تولید در بخش های ۱ تا ۳ هستند.

در اینصورت تعداد کل قطعه A که در بخش های ۱ و ۲ و ۳ تولید می شود. عبارت است از $۷x_۱ + ۶x_۲ + ۸x_۳$ و برای قطعه B داریم $۵x_۱ + ۹x_۲ + ۴x_۳$ دو محدودیت نیز داریم که مربوط به مقدار ماده خام ۱ و ۲ هستند و عبارتند از:

$$\begin{cases} ۸x_۱ + ۵x_۲ + ۳x_۳ \leq ۱۰۰ \\ ۶x_۱ + ۹x_۲ + ۸x_۳ \leq ۲۰۰ \end{cases}$$

چون هدف بیشینه ساختن تعداد کل واحدهای محصول نهایی است، و چون هر واحد محصول نهایی متشکل از چهار واحد از قطعه A و سه واحد از قطعه B است. تعداد بیشینه واحدهای محصول نهایی نمی تواند از یکی از دو عبارت زیر که کوچکتر است بیشتر باشد. $\frac{۵x_۱+۹x_۲+۴x_۳}{۳}$ و $\frac{۷x_۱+۶x_۲+۸x_۳}{۴}$

لذا تابع هدف و مدل بصورت زیر خواهد بود:

$$Max\ z = min\left\{\frac{۷x_۱+۶x_۲+۸x_۳}{۴} \text{ و } \frac{۵x_۱+۹x_۲+۴x_۳}{۳}\right\}$$

$$\text{st}\begin{cases} ۸x_۱ + ۵x_۲ + ۳x_۳ \leq ۱۰۰ \\ ۶x_۱ + ۹x_۲ + ۸x_۳ \leq ۲۰۰ \end{cases}$$

$$x_۱ , x_۲ , x_۳ \geq ۰$$

حال می خواهیم مدل فیش قبل را به یک مدل خطی تبدیل کنیم. برای این کار چه می کنیم؟

$$Max\ z = min\left\{\frac{۷x_۱+۶x_۲+۸x_۳}{۴} \quad و \quad \frac{۵x_۱+۹x_۲+۴x_۳}{۳}\right\}$$

$$\text{st}\begin{cases} ۸x_۱ + ۵x_۲ + ۳x_۳ \leq ۱۰۰ \\ ۶x_۱ + ۹x_۲ + ۸x_۳ \leq ۲۰۰ \end{cases}$$

$$x_۱ , x_۲ , x_۳ \geq ۰$$

تابع هدف مدل غیرخطی است، برای خطی کردن آن بصورت زیر عمل می کنیم:

ابتدا کل عبارت سمت راست مساوی را برابر با y قرار می دهیم (y تعداد واحدهای نهایی است که باید مونتاژ شود و برابر با مقدار آن یک از دو عبارت فوق که کوچکتر است می باشد). حال هر یک از عبارات را بزرگتر مساوی y قرار داده و بعد y را نیز به سمت چپ نامساوی منتقل می نمائیم (چون از پیش معلوم نیست که کدام یک از دو عبارت مذکور کوچکتر است این کار را انجام می دهیم.) یعنی داریم:

$$\frac{۷x_۱+۶x_۲+۸x_۳}{۴} \geq y \implies ۷x_۱ + ۶x_۲ + ۸x_۳ - ۴y \geq ۰$$

$$\frac{۵x_۱+۹x_۲+۴x_۳}{۳} \geq y \implies ۵x_۱ + ۹x_۲ + ۴x_۳ - ۳y \geq ۰$$

و این دو بعنوان محدودیت به مدل اضافه می شوند، در نهایت داریم:

$$Max\ z = y$$

$$\text{st}\begin{cases} ۷x_۱ + ۶x_۲ + ۸x_۳ - ۴y \geq ۰ \\ ۵x_۱ + ۹x_۲ + ۴x_۳ - ۳y \geq ۰ \\ ۸x_۱ + ۵x_۲ + ۳x_۳ \leq ۱۰۰ \\ ۶x_۱ + ۹x_۲ + ۸x_۳ \leq ۲۰۰ \end{cases}$$

$$x_۱ , x_۲ , x_۳, y \geq ۰$$

۱۱ ، ص ۳۳

در برنامه ریزی خطی، تابع هدف $Max\ z = \min\left\{۶x + ۲ \text{ و } x - ۳\right\}$ را معادل با کدامیک از عبارات زیر می توان نوشت؟

۱) $Max\ z = \{۷x - ۲\}$

۲) $z = x - ۳\,, z = ۶x + ۲$

۳) $z = y$ به ازای $x - y \geq ۳\,, -۶x + y \leq ۲$

۴) $z = y$ به ازای $x - y \leq ۳\,, -۶x + y \geq ۲$

[سراسری، مدیریت، ۷۹]

گزینه ۳

$$z = y \Rightarrow \begin{cases} y \leq ۶x + ۲ \\ y \leq x - ۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۶x + y \leq ۲ \\ y - x \leq -۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۶x + y \leq ۲ \\ x - y \geq ۳ \end{cases}$$

مدل ارائه شده متناظر با کدام مدل است؟

$$MaxZ = Min\{۳x_۱ + ۲x_۲ , ۵x_۱ - x_۲\}$$
$$s.t. \quad ۴x_۱ + ۲x_۲ \leq ۱۲$$

۱) $Min\ Z = ۸x_۱ + x_۲$
$$۴x_۱ + ۲x_۲ \leq ۱۲$$
$$x_۱, x_۲ \geq ۰$$

۲) $Max\ Z = ۳x_۱ + ۲x_۲$
$$۴x_۱ + ۲x_۲ \leq ۱۲$$
$$۵x_۱ - x_۲ \geq ۰$$
$$x_۱, x_۲ \geq ۰$$

۳) $Max\ Z = y$
$$۳x_۱ + ۲x_۲ - y \geq ۰$$
$$۵x_۱ - x_۲ - y \geq ۰$$
$$۴x_۱ + ۲x_۲ \leq ۱۲$$

۴) $Max\ Z = y$
$$۳x_۱ + ۲x_۲ - y \leq ۰$$
$$۵x_۱ - x_۲ - y \leq ۰$$
$$۴x_۱ + ۲x_۲ \leq ۱۲$$

[سراسری، مدیریت، ۸۰]

گزینه ۳

تابع هدف را برابر با y قرار می دهیم و بعد:

$$\begin{cases} ۳x_۱ + ۲x_۲ \geq y \\ ۵x_۱ - x_۲ \geq y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \text{Max Z} = \text{y} \\ ۳x_۱ + ۲x_۲ - y \geq ۰ \\ ۵x_۱ - x_۲ - y \geq ۰ \\ ۴x_۱ + ۲x_۲ \leq ۱۲ \\ x_۱, x_۲ \ , \ \ \text{y} \geq ۰ \end{cases}$$

تابع هدف یک مسئله به صورت $Maxz = min\left\{۵x_۱ + ۶x_۲ \text{ و } ۷x_۱ + ۹x_۲\right\}$ تعریف شده است. تبدیل خطی آن کدام است؟

۱) $\begin{cases} ۵x_۱ + ۶x_۲ - y = ۰ \\ ۷x_۱ + ۹x_۲ - y = ۰ \end{cases}$

۲) $۱۲x_۱ + ۱۵x_۲ - y = ۰$

۳) $\begin{cases} ۵x_۱ + ۶x_۲ - y \leq ۰ \\ ۷x_۱ + ۹x_۲ - y \leq ۰ \end{cases}$

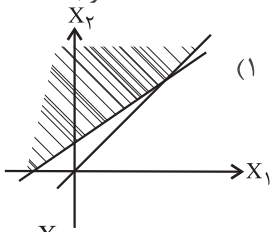
۴) $\begin{cases} ۵x_۱ + ۶x_۲ - y \geq ۰ \\ ۷x_۱ + ۹x_۲ - y \geq ۰ \end{cases}$

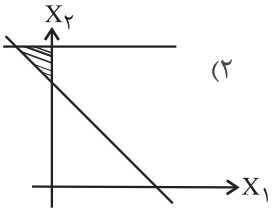
[سراسری، مدیریت، ۸۹]

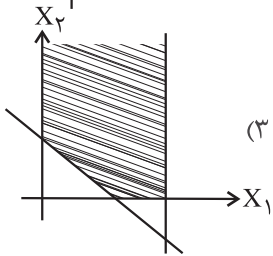
گزینه ۴

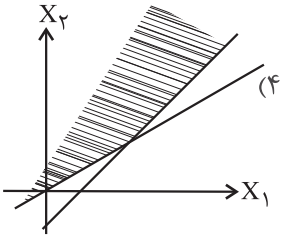
$$\begin{aligned} &\text{Max } Z = y \\ &\begin{cases} ۵x_۱ - ۶x_۲ \geq y \\ ۷x_۱ + ۹x_۲ \geq y \end{cases} \\ &x_۱, x_۲, y \geq ۰ \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} &\text{Max } Z = y \\ &\begin{cases} ۵x_۱ - ۶x_۲ - y \geq ۰ \\ ۷x_۱ + ۹x_۲ - y \geq ۰ \end{cases} \\ &x_۱, x_۲, y \geq ۰ \end{aligned}$$

منطقه موجه متناظر با تابع $\text{Min } z = \text{Max}\{۳x_۱, x_۱ + ۱\}$ مطابق است با:

۱)


۲)


۳)


۴)


[سراسری، مدیریت، ۸۳]

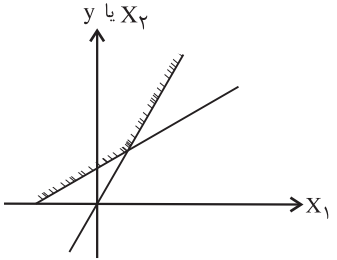
گزینه ۱

$Max\{۳x_۱ , x_۱ + ۱\}$ را برابر با y قرار می دهیم. با توجه به این که ماکزیمم دو عبارت داخل کروشه، برابر با y است، آن مقادیر را به صورت جداگانه، بزرگتر مساوی y قرار می دهیم، یعنی:

$$\text{Min Z} = Max\{۳x_۱ , x_۱ + ۱\} \rightarrow y = Max\{۳x_۱ , x_۱ + ۱\}$$

$$\rightarrow \begin{cases} ۳x_۱ \le y \rightarrow ۳x_۱ - y \le ۰ \\ x_۱ + ۱ \le y \rightarrow -x_۱ + y \ge ۱ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{Min Z} = y \\ ۳x_۱ - y \le ۰ \\ -x_۱ + y \ge ۱ \\ x_۱ , y \ge ۰ \end{cases}$$

و حالت ترسیمی آن:



در ساخت یک محصول مشخص الف، دو قطعه ۱ و ۲ استفاده می شود بطوریکه هر واحد الف از ۳ قطعه ۱ و ۲ قطعه ۲ ساخته می شود. این قطعات می بایست از بیرون تهیه شود. اگر میزان تولید محصول الف در دوره برنامه ریزی ،A، و میزان خرید قطعات ۱ و ۲ به ترتیب $X_۱$ و $X_۲$ باشد و قیمت فروش هر واحد محصول الف، ۱۰۰ تومان، مدل برنامه ریزی خطی برای تهیه قطعات و ساخت محصول با هدف بیشینه سازی درآمد کل عبارتند از:

$$Max\ Z = ۱۰۰A \quad (۱) \qquad \begin{cases} A - ۳X_۱ \le ۰ \\ A - ۲X_۲ \le ۰ \end{cases} \qquad A, X_۱, X_۲ \ge ۰$$

$$Max\ Z = ۱۰۰A \quad (۲) \qquad \begin{cases} A = Max\{\frac{X_۱}{۳}, \frac{X_۲}{۲}\} \\ A, X_۱, X_۲ \ge ۰ \end{cases}$$

$$Max\ Z = ۱۰۰A \quad (۳) \qquad \begin{cases} A = Min\{\frac{X_۱}{۳}, \frac{X_۲}{۲}\} \\ A, X_۱, X_۲ \ge ۰ \end{cases}$$

$$Max\ Z = ۱۰۰A \quad (۴) \qquad \begin{cases} ۳A - X_۱ \le ۰ \\ ۲A - X_۲ \le ۰ \end{cases} \qquad A, X_۱, X_۲ \ge ۰$$

[سراسری، مدیریت، ۸۲]

گزینه ۴

تعداد تولید محصولات الف با A نشان داده شده است. می خواهیم بیشترین درآمد را کسب کنیم، بنابراین تابع هدف را بصورت $Max\ Z = ۱۰۰A$ می نویسیم. به ازای هر واحد محصول A، سه واحد قطعه ی ۱ و ۲ واحد قطعه ی ۲ مصرف می شود. با توجه به اینکه حد مشخصی برای منابع ۱ و ۲ ارائه نشده است. محدودیت ها را طوری تعریف می کنیم که بیانگر میزان استفاده ی دو محصول به منظور تولید A باشد، در نتیجه:

$$Max\ Z = ۱۰۰A$$

$$\begin{cases} ۳A - X_۱ \leq ۰ \\ ۲A - X_۲ \leq ۰ \end{cases}$$

$$\mathrm{A}, \mathrm{X}_۱, \mathrm{X}_۲ \geq ۰$$

یک محصول از مونتاژ دو قطعه A و B ساخته می شود. در صورتی که Z مقدار تولید این محصول و X_A و X_B مقدار تولید این دو قطعه باشد، تابع هدف مدل این مسأله چیست؟

۱) $Max\ z = X_A + X_B$

۲) $Max\ z = Min\ \{X_A, X_B\}$

۳) $Max\ z = Min\ \{X_A + X_B\}$

۴) $Min\ z = Max\{X_A, X_B\}$

[سراسری، مدیریت، ۸۱]

گزینه ۲

می خواهیم حداکثر تعداد Z را با حداقل تعداد x_A و x_B تولید کنیم:

$$Max\ Z = Min\ \{x_A\ , x_B\}$$

* حداکثر Z نمی تواند از حداقل تعداد x_A و x_B بیشتر باشد.

منظور از ورودیهای مدل چیست؟

۱۰ ص ۱۸

ورودی های مدل عواملی هستند که مدل روی آنها عمل می کند.

(اطلاعاتی که براساس آنها مدل ساخته شده است ورودیهای مدل هستند)

به ورودی های مدل، متغیرهای ..... هم گفته می شود.

۱۰ ص ۱۸

برون زا[۱]

(چون در خارج از مدل تولید شده اند)

[۱] برون زا = exogenous

ورودیهای مدل که معمولا به آن، متغیرهای برون زا می گویند، به دو نوع ..... و ..... تقسیم می شوند.

۱۰ ص ۱۸

متغیرهای تصمیم ـ پارامترها

ورودیهای مدل

(متغیرهای برون زا)

متغیرهای تصمیم

پارامترها

منظور از خروجی های مدل چیست؟

۱۰ ص ۱۸

خروجی ها یا ستاده های مدل، عوامل تولید شده توسط مدل هستند.

(جوابی که از مدل حاصل می شود خروجی مدل است)

به ستاده های مدل، ..... هم گفته می شود.

۱۰ ص ۱۸

متغیرهای درون زا (endogenous variables)

(چون از درون مدل مقدار آنها به دست آمده)

سخن پایان فصل

در ایـن فصـل توضـیحات و مثالهـایی در مـورد مدلسـازی ریاضـی بیـان شـد. از ایـن فصـل در آزمونهـا معمـولاً یـک یـا دو سـؤال آورده مـی شـود و عمومـاً بصـورت نوشـتن یـک محـدودیت یـا تـابع هـدف مـی باشـد. لازمـه ی پاسـخ گفـتن بـه ایـن سـؤالات، بـیش از هـر چیـز درک مسـأله و تحلیل ذهنی در مورد آن می باشد. هم اکنـون درک و بینش دقـیق تری نسبت به مدلـها و نحوه ی ساختن آنها پیدا کرده ایم و در فصول بعدی به بحث و بررسی روشهای مختلف برای حل آنها خواهیم پرداخت.

فصل ۳ - برنامه ریزی خطی و روش ترسیمی

سخن آغاز فصل

روش ترسیمی روشی ساده و کارا برای حل مسائل ساده و خطی تحقیق در عملیات می باشد. درک عمیق و ایجاد یک تصویر ذهنی از روش ترسیمی، می تواند تأثیری مستقیم یا غیر مستقیم بر حل بسیاری از مسائل توسط شما داشته باشد. سعی کنید مطالب این فصل را بسیار خوب یاد بگیرید.

فهرست فصل سوم

تعاریف و کلیات.....۲۶۹-۲۹۳
صفحه مختصات.....۲۹۴-۳۰۴
رسم محدودیت ها و تعیین منطقه موجه.....۳۰۵-۳۴۲
یافتن جواب بهینه.....۳۴۳-۳۸۳
حالت های خاص در مسائل برنامه ریزی خطی.....۳۸۴-۴۴۰
نوشتن معادله محدودیت از روی شکل.....۴۴۱-۴۵۸
نقاط و محدودیت ها.....۴۵۹-۴۸۱
بازی های ریاضی با مدل.....۴۸۲-۵۱۳
تعیین تعداد نقاط گوشه.....۵۱۴-۵۲۱

مطالب متفرقه..... ۵۲۲-۵۲۷
فرضیات مدلهای برنامه ریزی خطی..... ۵۲۸-۵۴۱
تست های پایان فصل..... ۵۴۲-۵۵۰

منظور از صدق کردن یک نقطه در یک محدودیت چیست؟

منظـــور اینســـت کـــه اگـــر مقادیر متغیرهـــای نقطـــه را در محـــدودیت جایگـــذاری کنـــیم، علامـــت محدودیت همچنان برقرار باشد.

آیا نقطه ی ($x_۱ = ۲$ و $x_۲ = ۵$) در محدودیت زیر صدق می کند؟

$$۲x_۱ + x_۲ \leq ۱۰$$

نقطه را در محدودیت جایگذاری می کنیم:

$$۲(۲) + ۵ \leq ۱۰$$

بله صدق می کند چون ۹ کوچکتر از ۱۰ است.

آیا نقطه ی $(x_1 = 1 \ , \ x_2 = 5)$ در محدودیت زیر صدق می کند؟

$5x_1 + x_2 \leq 10$

$$۵(۱) + ۵ \leq ۱۰$$

بله صدق می کند چون ۱۰ = ۱۰ و علامت ≤ علامت = را نیز در بر می گیرد.

آیا نقطه ی $(x_1 = ۲ \ , \ x_2 = ۵)$ در محدودیت زیر صدق می کند؟

$۵x_1 + x_2 \leq ۱۰$

$$۵(۲) + ۵ \leq ۱۰ \longrightarrow ۱۵ \leq ۱۰$$

خیر صدق نمی کند.

آیا نقطه ی $(x_1 = 1 \ , \ x_2 = 5)$ در محدودیت زیر صدق می کند؟

$5x_1 + x_2 < 5$

$$۵(۱) + ۵ < ۵$$

خیر صدق نمی کند.

معادله ی حدی چگونه بدست می آید؟

۱ ص ۳۴

معادلــه ی حــدی هــر محــدودیت بــا جــایگزین نمــودن علائــم $\geq$ یــا $\leq$ بــا علامــت $=$ بدست می آید.

معادله حدی محدودیت زیر چگونه است؟

- ☐
- ☐ $۲x_۱ + x_۲ \leq ۴$
- ☐
- ☐
- ☐

$$۲x_۱ + x_۲ = ۴$$

علامت $\leq$ را با = تعویض کردیم.

معادله حدی محدودیت زیر را بنویسید؟

- $x_۲ \geq ۲$

$$x_{۲} = ۲$$

معادله حدی محدودیت زیر را بنویسید؟

$$۴x_۱ + x_۲ = ۱۲$$

$$۴x_۱ + x_۲ = ۱۲$$

خود محدودیت یک معادله حدی است.

چرا "معادله‌ی حدی" را به این عنوان می نامند؟

۱ ص ۳۴

چون معادله ی حدی، حد و یا مرز منطقه موجه را بیان می دارد.

در برنامه ریزی خطی منظور از منطقه موجه (Feasible Region) چیست؟

۱ ص ۳۴

منطقه ای است **محدب** که از مجموعه جـــواب هـــای موجـــه ایجـــاد شـــده اســـت. ایـــن منطقـــه متشکل از جوابهایی (جوابی) است که در تمام محدودیت ها صدق می کند.

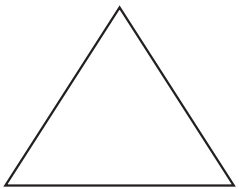
به بیان ســاده تر: وقتی محدودیت های مدل رو رســم می کنیم، متغیرهای (X_1 و X_2) به ازای مقـــادیر خاصـــی در هر کدوم اونها صـــدق می کنن، ممکنه مقدار یا مقـــادیری از X_2 و X_1 باشه که در همـه محـــدودیت های مدل صدق کنه. مجمـــوعه ی این مقـادیر منطقـــه ای رو تشکیل می ده که به اون منطقه موجه می گن.

مجموعه ی محدب به چه مجموعه ای گفته می شود؟

۳ ص ۵۹

مجموعه محدب به مجموعه ای گفته می شود که اگر دو نقطه ی انتخابی از آن را با خط مستقیم به هم وصل نمائیم، خط واصل در داخل مجموعه قرار گیرد.

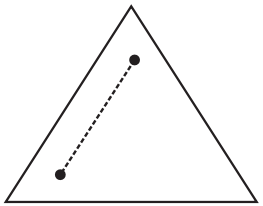
آیا شکل زیر محدب است؟



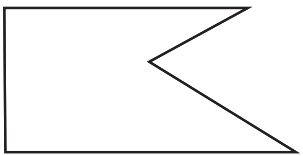
بله

زیـــرا هـــر دو نقطـــه ای درون ایـــن شـــکل انتخـــاب کنـــیم و بـــه هـــم وصـــل کنـــیم، خـــط واصل درون شکل قرار دارد.

مثال:



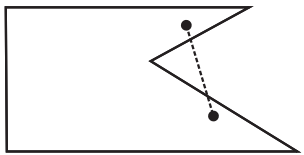
آیا چند ضلعی زیر محدب است؟



خیر

زیرا می توان نقاطی در داخل شکل رسم کرد و به هم وصل نمود که خط واصل آنها درون شکل قرار نگیرد.

مثال:



کدام یک از چند ضلعی های زیر محدب است؟

الف ب ج د

الف و ج

کدام مجموعه، اشکال محدودیت های مدل برنامه ریزی خطی را نشان می دهد؟

۱)

۲)

۳)

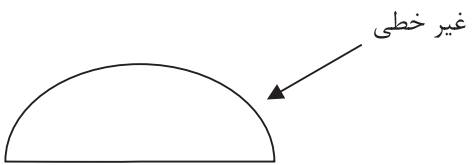
۴)

[سراسری، مدیریت، ۷۷]

گزینه ۱

تمامی اشکال این گزینه محدب هستند.

اشکال گزینه ۲ هم محدب هستند اما شکل چهارم آن دارای یک ضلع غیر خطی است.



در یک LP، منطقه موجه به صورت یک مجموعه ..... است.

(برنامه ریزی خطی= LP=Linear Programing)

۳ ص ۵۹

محدب

در فرهنگ برنامه ریزی خطی منظور از جواب چیست؟
(جواب = Solution)

۱ ص ۳۴

هر مجموعه از مقادیر که به متغیرهای تصمیم اختصاص یابد یک جواب نامیده می شود. بدون در نظر گرفتن این که چنین جوابی مطلوب باشد یا نباشد و یا این مجموعه مقادیر در محدودیت ها صدق بکند یا نکند.

آیا در برنامه ریزی خطی منظور از جواب، همان جواب نهایی مسأله است؟

۱ ص ۳۴

خیـــر، هـــر مجموعـــه از مقـــادیر کـــه بـــه متغیرهـــای تصـــمیم اختصـــاص یابـــد یـــک جـــواب نامیده می شود.

جواب موجه (Feasible Solution) چیست؟

۱ ص ۳۴

جوابی است که در تمام محدودیت های مدل صدق کند

جواب غیر موجه چیست؟

- ☐
- ☐
- ☐
- ☐
- ☐ ۱ ص ۳۴

جوابی است که در یک یا چند محدودیت مدل صدق نمی کند.

جواب بهینه (Optimal Solution) چیست؟

۱ ص ۳۴

جوابی است موجه که به ازاء آن، تابع هدف به مطلوب ترین وضعیت در می آید.

بعبارت دیگر، جوابی است که در همه محدودیت های مدل صدق می کند و به ازاء آن، تابع هدف به مطلوب ترین مقدار ممکن خود می رسد.

به صورت کلی، مدلهای برنامه ریزی خطی به دنبال بهینه سازی می باشند، که این بهینه سازی به یکی از شکل های ..... یا ..... مطرح می باشد.

۱۴ ص ۲۲

بیشینه سازی

کمینه سازی

بهینه سازی Optimization

بیشینه سازی Maximization

کمینه سازی Minimization

جواب گوشه چیست؟

۱ ص ۳۴

مقـــادیر تخصـــیص داده شـــده بـــه متغیرهـــای تصـــمیم ناشـــی از تقـــاطع معـــادلات حـــدی، جواب گوشه نامیده می شوند.

روش ترسیمی برای حل چه مدلهایی می باشد؟

۱ ص ۳۷

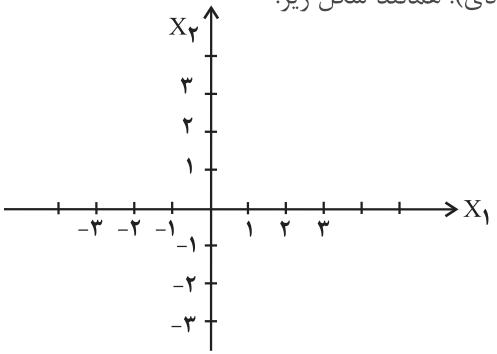
حل مدلهای برنامه ریزی خطی دو متغیره

(یا حداکثر سه متغیره که البته کارایی این روش در مدلهای سه متغیره بسیار کم است)

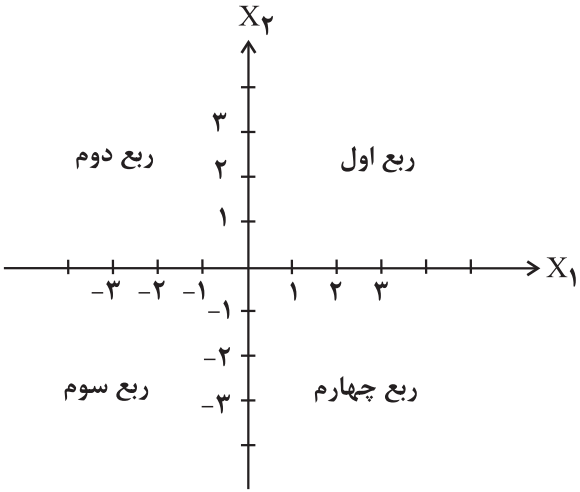
در روش ترسیمی برای مسائل دو متغیره، صفحه مختصات چگونه رسم می شود؟

۱۴ ص ۷۶

یک محور افقی مدرج رسم کرده و آن را محور x_1 می نامیم (محور x در یک صفحه مختصات عادی) و بر روی آن یک محور عمودی مدرج رسم کرده و آن را x_2 می نامیم (محور y در یک صفحه مختصات عادی). همانند شکل زیر:



یک صفحه ی مختصات رسم کرده و چهار ربع آن را مشخص کنید؟


X۲
X۱
ربع اول
ربع دوم
ربع سوم
ربع چهارم
۳
۲
۱
-۱
-۲
-۳
۱
۲
۳
-۱
-۲
-۳

معنـــی متغیرهـــای غیـــر منفـــی ایـــن است که تنها ربع ..... در نظـــر گرفتـــه مـــی شـــود و ..... در این ربع قابل قبول است.

به یاد دارید که یکی از بخشهای مدل، وضعیت متغیرها بود. وضعیت هر متغیر ممکن است به دو صورت زیر باشد.

(x_i غیر منفی که بصورت $x_i \geq ۰$ و یا (x_i آزاد در علامت) نشان داده می شود.

۱ ص ۳۸

اول
منطقه ی موجه

آزاد در علامت بودن یک متغیر به این معناست که آن متغیر علاوه بر مقادیر ..... و.....، می تواند مقادیر ..... را نیز اختیار کند.

۲ ص ۱۸

مثبت

صفر

منفی

متغیرهـــای آزاد در علامـــت، متغیرهـــایی هســـتند کـــه مـــی تواننـــد مقـــادیر ..... را نیز اختیار کنند .

۱ ص ۹۹

منفی

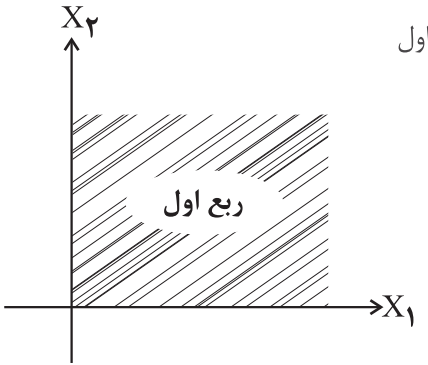
آزاد در علامـــــت بـــــودن متغیرهـــــا در ..... تـــــأثیری نـــــدارد و فقـــــط در ..... محدودیت نقش ایفا می کند.

۲ ص ۱۸

رسم محدودیت ها
تعیین منطقه موجه

در صورتی که $x_1 , x_2 \geq 0$ باشند، منطقه ی موجه می تواند در کدام ربع قرار بگیرد؟

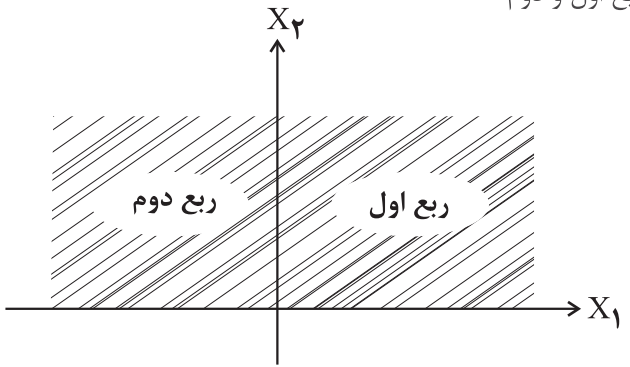
۲ ص ۱۸


X۲
ربع اول
X۱

در صورتی که x_1 آزاد در علامت و $x_2 \geq 0$ باشد، منطقه ی موجه می تواند در کدام ربع قرار گیرد؟

۲ ص ۱۸

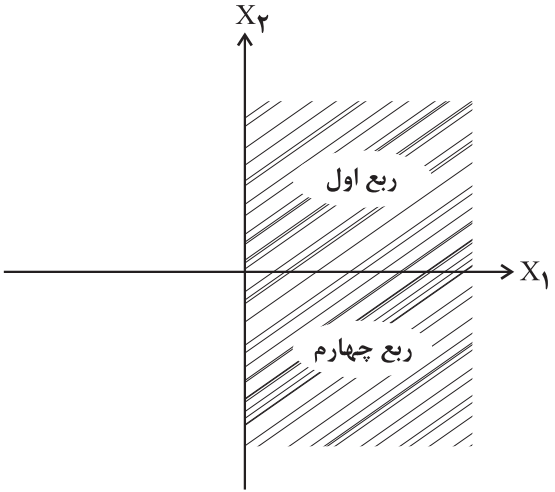
ربع اول و دوم



یعنی اینکه مقدار X_1 ممکن است مثبت ، صفر یا منفی باشد ، اما مقدار X_2 حتماً مثبت یا صفر است.

اگر $x_1 \geq 0$ و x_2 آزاد در علامت باشد، منطقه ی موجه می تواند در کدام ربع قرار بگیرد؟

۲ ص ۱۸

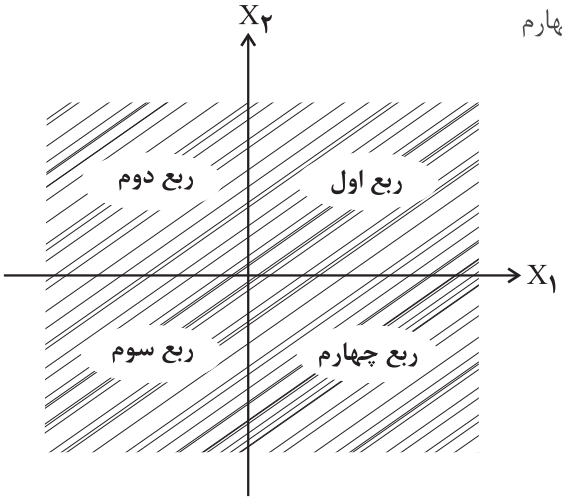


ربع اول و چهارم

اگـــر x_2 و x_1 هـــر دو آزاد در علامـــت باشـــند، منطقـــه ی موجـــه مـــی توانـــد در کـــدام ربـــع قرار بگیرد؟

۲ ص ۱۸

در هر چهار ربع اول – دوم – سوم – چهارم



هنگامی که فرض $x_1 , x_2 \geq 0$ باشد، منطقه ی موجه می تواند در ربع ..... و هنگامی که x_1 آزاد در علامت و $x_2 \geq 0$ باشد، منطقه ی موجه می تواند در ربع ..... و هنگامی که x_2 آزاد در علامت و $x_1 \geq 0$ باشد، منطقه ی موجه می تواند در ربع ..... و هنگامی که x_2 و x_1 هر دو آزاد در علامت باشند، منطقه ی موجه می تواند در ربع ..... قرار گیرد.

۲ ص ۱۸

اول

اول و دوم

اول و چهارم

اول و دوم و سوم و چهارم

مراحل حل با روش ترسیمی را نام ببرید؟

۱ ص ۳۸

۱- تعیین منطقه موجه

۲- پیدا کردن جواب بهینه

منطقه موجه چیست؟

۱ ص ۳۸

منطقه موجه فصل مشترکی از محدودیت هاست که مختصات نقاط این منطقه در کلیه محدودیت ها صدق می کند.

برای تعیین منطقه ی موجه چه می کنیم؟

۱ ص ۳۸

۱) محدودیت ها را به صورت معادله ی حدی درآورده و رسم می کنیم.

۲) منطقه ی موجه هر محدودیت را تعیین می کنیم.

۳) منطقه ی موجه مدل را انتخاب می کنیم (سطحی که در منطقه ی موجه همه ی محدودیت ها مشترک است)

منطقه ی موجه محدودیت با علامت = چگونه تعیین می شود؟
(با فرض $x_j \geq 0$)

۲ ص ۱۷

منطقه ی موجه محدودیت با علامت مساوی، بخشی از آن خط است که در ربع اول قرار دارد.

(خود همان خط در ربع اول)

برای رسم معادله ی حدی یک محدودیت چه کنیم؟

۱ ص ۳۸

۱- یک صفحه مختصات با محورهای x_1 و x_2 در نظر می گیریم.

۲- علامت محدودیت را (هر چه که بود) مساوی فرض می کنیم.

۳- مقدار یک متغیر را صفر در نظر گرفته و مقدار متغیر دیگر را محاسبه می کنیم (مثلاً $x_1 = 0$ و محاسبه ی مقدار x_2) $(0 , x_2)$

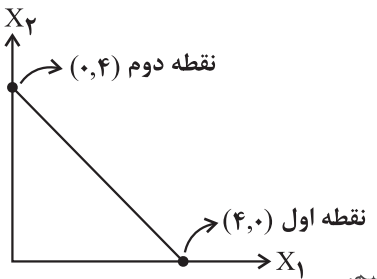
۴- متغیر دیگر را نیز مانند گام ۳ محاسبه می کنیم (یعنی $x_2 = 0$ و محاسبه ی مقدار x_1) $(x_1 , 0)$

۵- نقطه های $(x_1 , 0)$ و $(0 , x_2)$ بدست آمده را بر روی محورهای مختصات علامت زده و خطی رسم می کنیم که دو نقطه را به هم وصل کند.

معادله ی حدی محدودیت زیر را رسم کنید؟

$x_1 + x_2 \leq 4$

$x_1 , x_2 \geq 0$



معادله ی حدی را می نویسیم: $x_1 + x_2 = 4$

مقدار x_2 را صفر قرار داده و x_1 را بدست می آوریم (نقطه اول)

$x_2 = 0 \rightarrow x_1 + 0 = 4 \rightarrow x_1 = 4$ و $x_2 = 0$

مقدار x_1 را صفر قرار داده و x_2 را بدست می آوریم (نقطه دوم)

$x_1 = 0 \rightarrow 0 + x_2 = 4 \rightarrow x_1 = 0$ و $x_2 = 4$

حال دو نقطه را رسم می کنیم و با یک خط به هم وصل می نمائیم.

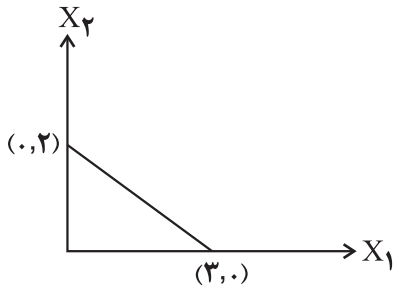
(شرط $x_1 , x_2 \geq 0$ بیانگر غیر منفی بودن متغیرهاست، و منظور این است که فقط ربع اول مورد قبول است)

معادله ی حدی محدودیت زیر را رسم کنید؟

$$۲x_۱ + ۳x_۲ \leq ۶$$
$$x_۱ , x_۲ \geq ۰$$

۱ ص ۳۹

$$۲x_۱ + ۳x_۲ = ۶ \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x_۱ = ۰ \rightarrow x_۲ = ۲ \\ x_۲ = ۰ \rightarrow x_۱ = ۳ \end{cases}$$



منطقه ی موجه محدودیت را چگونه تعیین می کنیم؟

(محدودیت های با علامت $\leq$ یا $\geq$ و با شرط $x_j \geq 0$)

۱ ص ۳۹

پس از رسم معادله حدی محدودیت، یک نقطه که روی خط قرار ندارد را در نظر گرفته و مختصات آن نقطه را در محدودیت قرار می دهیم (نقطه ی (۰ , ۰) برای این کار مناسب است)، با توجه به علامت محدودیت، اگر نقطه ی مورد نظر در محدودیت صدق کرد، سمتی از خط که در ربع اول است و نقطه در آن قرار دارد منطقه ی موجه محدودیت است و در غیر این صورت سمت دیگر خط، منطقه ی موجه محدودیت می باشد.

توضیح بیشتر در مورد رسم منطقه ی موجه محدودیت $۲x_۱ + ۳x_۲ \leq ۶$
$x_۱ , x_۲ \geq ۰$

برای رسیدن به منطقه موجه محدودیت مراحل زیر را طی کردیم:

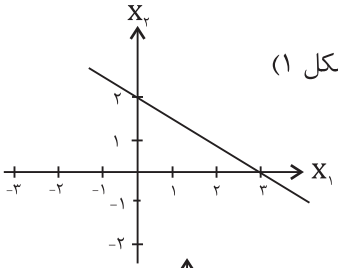
۱) معادله حدی محدودیت را نوشته و رسم نمودیم. شکل ۱

۲) با توجه به شرط $x_1 , x_2 \geq 0$ که در زیر محدودیت بیان شده، ربع دوم و سوم و چهارم را کنار گذاشتیم (چون طبق این شرط فقط نقاطی مورد قبولند که X_2 و X_1 آنها صفر و یا مثبت باشد).

شکل ۲

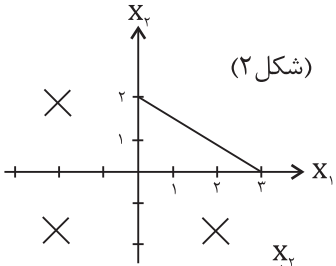
۳) در ربع اول یک نقطه که روی معادله حدی نیست را بصورت دلخواه انتخاب کرده و در محدودیت قرار می دهیم، مثلاً نقطه ی (۰ و ۰)، چون در محدودیت صدق کرد، پس سمتی از خط که نقطه در آن قرار دارد (و در ربع اول است) منطقه موجه این محدودیت می باشد. شکل ۳

(ادامه در فیش بعد)



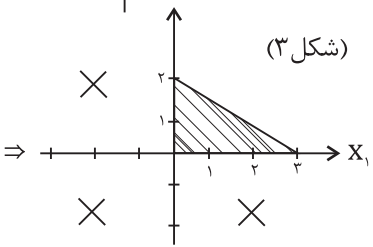
(شکل ۱)

⇒



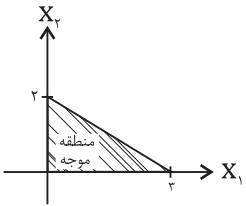
(شکل۲)

⇒ ۲(۰)+ ۳(۰)≤ ۶



(شکل۳)

⇒ ⇒ و یا به صورت ساده تر ⇒



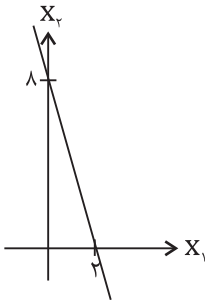
منطقه ی موجه محدودیت زیر را رسم کنید؟

$$۴x_۱ + x_۲ \leq ۸$$
$$x_۱ , x_۲ \geq ۰$$

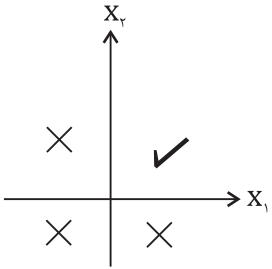
۱) رسم معادله حدی

۲) توجه به شرط و تعیین x_1 و x_2 های مورد قبول

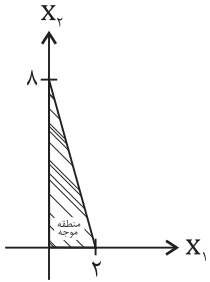
۳) تعیین منطقه موجه



$۴x_1 + x_2 = ۸$



$x_1 , x_2 \geq ۰$



$۴x_1 + x_2 \leq ۸$

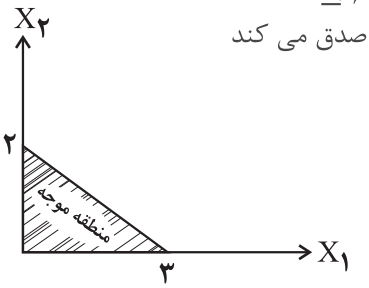
محدودیت زیر را رسم کرده و منطقه ی موجه آن را مشخص کنید؟

$$۲x_۱ + ۳x_۲ \leq ۶$$
$$x_۱ , x_۲ \geq ۰$$

۱ ص ۳۹

$$(۰ , ۰) \rightarrow ۲(۰) + ۳(۰) \leq ۶$$
$$۶ \leq ۰$$

صدق می کند



محدودیت زیر را رسم کنید؟

(از این به بعد منظور از رسم کردن، تعیین منطقه موجه نیز هست)

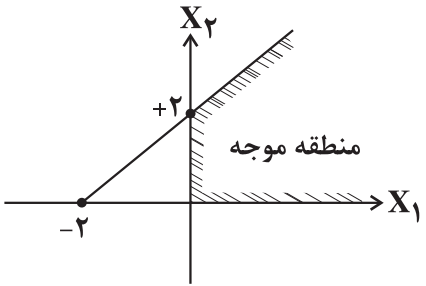
$$-۲x_۱ + ۲x_۲ \leq ۴$$
$$x_۱ , x_۲ \geq ۰$$

۲ ص ۱۷

معادله ی حدی را رسم می کنیم، مقدار یک نقطه مثلاً (۰ , ۰) را در محدودیت قرار می دهیم:

$$-۲(۰) + ۲(۰) \leq ۴$$

چون صدق می کند، منطقه ی زیر محدودیت که نقطـه (۰ , ۰) در آن قـرار دارد، در منطقـه ی اول، منطقه ی موجه محدودیت است.

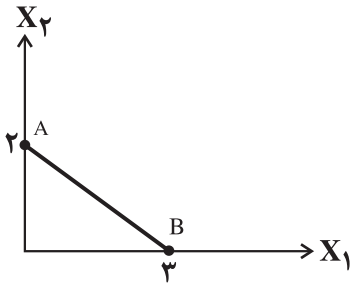


محدودیت زیر را رسم کرده و منطقه ی موجه آن را تعیین کنید؟

$$۲x_۱ + ۳x_۲ = ۶$$
$$x_۱ , x_۲ \geq ۰$$

۲ ص ۱۷

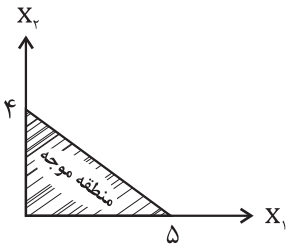
منطقه موجه، خود پاره خط AB است.



چرا؟ چون فقط نقاط روی خود خط که در ربع اول قرار دارند در معادله آن صدق می کنند، در نتیجه نقاط روی پاره خط AB منطقه ی موجه این محدودیت می باشند.

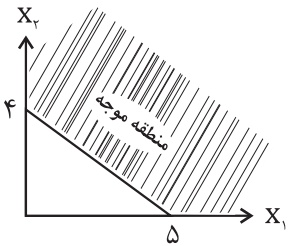
محدودیت زیر را رسم کنید؟

$$۴x_۱ + ۵x_۲ \leq ۲۰$$
$$x_۱ , x_۲ \geq ۰$$


X۲
۴
منطقه موجه
X۱
۵

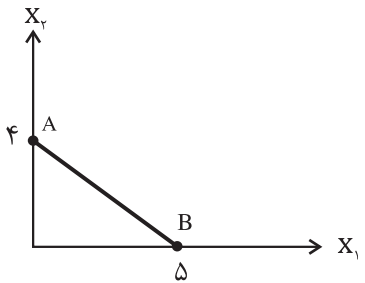
محدودیت زیر را رسم کنید؟

$$۴x_۱ + ۵x_۲ \geq ۲۰$$
$$x_۱ , x_۲ \geq ۰$$


X۲
۴
منطقه موجه
X۱
۵

محدودیت زیر را رسم کنید؟

$$۴x_۱ + ۵x_۲ = ۲۰$$
$$x_۱ , x_۲ \geq ۰$$

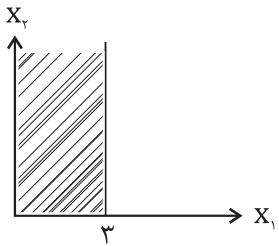


(منطقه موجه، خود پاره خط AB است)

محدودیت زیر را رسم کنید؟

$$x_1 \leq 3$$

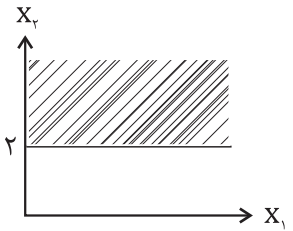
$$x_1 , x_2 \geq 0$$


X۲
X۱
۳

محدودیت زیر را رسم کنید؟

$x_۲ \geq ۲$

$x_۱ , x_۲ \geq ۰$


X_2
۲
X_1

منطقه ی موجه مربوط به دو محدودیت زیر که مربوط به یک مدل هستند چگونه است؟

$$\begin{cases} ۲x_۱ + x_۲ \leq ۸ \\ x_۱ + ۲x_۲ \leq ۸ \end{cases}$$
$$x_۱ , x_۲ \geq ۰$$

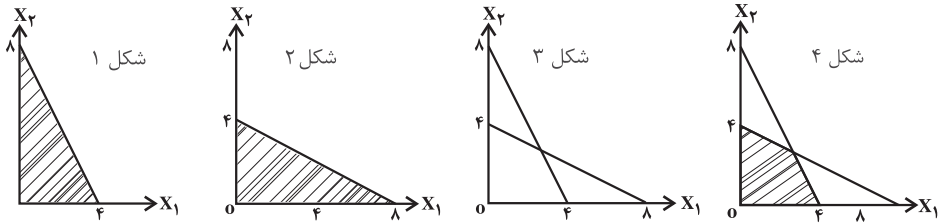
شکل ۱: منطقه موجه محدودیت اول

شکل ۲: منطقه موجه محدودیت دوم

(منطقه موجه مدل منطقه ای است که در منطقه موجه هر دو محدودیت مشترک باشد.)

شکل ۳: معادله حدی هر دو محدودیت روی یک صفحه

شکل ۴: منطقه موجه مدل (منطقه مشترک در هر دو محدودیت)



برای مدل زیر، منطقه ی موجه را رسم کنید؟

$$Maxz = ۲x_۱ + ۳x_۲$$

$$st: \begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ \leq ۶ \\ ۲x_۱ + x_۲ \leq ۶ \end{cases}$$

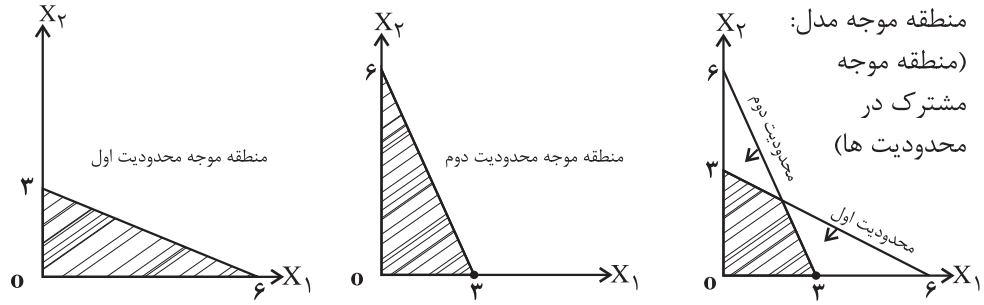
$$x_۱ , x_۲ \geq ۰$$

ا ص ۴۰

منطقه موجه مدل: (منطقه ای است که در منطقه موجه هر دو محدودیت مشترک است)

(توجه کنید که تابع هدف تأثیری در منطقه موجه ندارد)

منطقه موجه مدل: (منطقه موجه مشترک در محدودیت ها)



شکل ۱ شکل ۲ شکل ۳

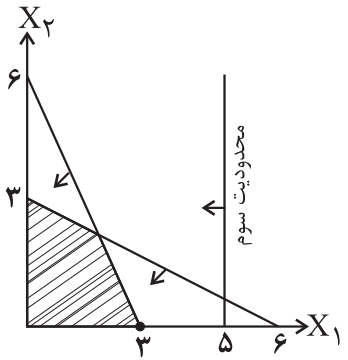
* توجه داشته باشید که در رسم منطقه موجه، تابع هدف هیچ نقشی ندارد.

برای مدل زیر، منطقه موجه را رسم کنید؟

$$Maxz = ۲x_۱ + ۳x_۲$$

$$st: \begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ \leq ۶ \\ ۲x_۱ + x_۲ \leq ۶ \\ x_۱ \leq ۵ \end{cases}$$

$$x_۱ , x_۲ \geq ۰$$



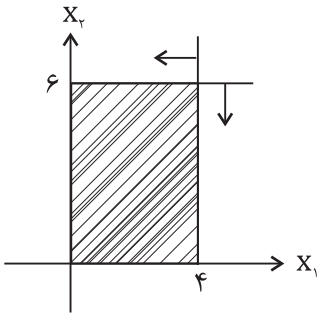
* چون فضای مشترک محدودیت سوم با محدودیت اول و دوم، همان فضای مشترک بین دو محدودیت اول و دوم است، بودن یا نبودن این محدودیت تأثیری بر منطقه ندارد.

منطقه موجه مدل زیر را رسم کنید؟

$$Maxz = x_۱ + x_۲$$

$$st: \begin{cases} x_۱ \leq ۴ \\ x_۲ \leq ۶ \end{cases}$$

$$x_۱ , x_۲ \geq ۰$$



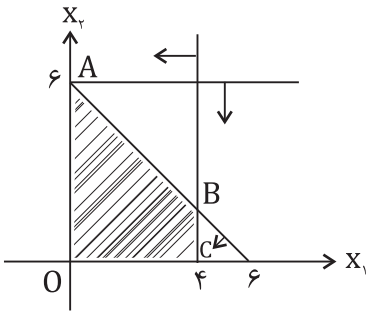
$x_1 \leq 4$ به معنای تمامی نقاطی است که x_1 آنها کوچکتر از ۴ است و تمامی نقاط سمت چپ خط $x_1 = 4$ را در برمی گیرد، با توجه به شرط $x_1 , x_2 \geq 0$ تمامی نقاط مذکور در ربع اول مدنظر هستند، به طریق مشابه $x_2 \leq 6$ را نیز رسم می کنیم و بعد فضای مشترک هر دو محدودیت منطقه موجه مدل است.

منطقه موجه مدل زیر را رسم کنید؟

$$Maxz = x_۱ + x_۲$$

$$st: \begin{cases} x_۱ \leq ۴ \\ x_۲ \leq ۶ \\ x_۱ + x_۲ \leq ۶ \end{cases}$$

$$x_۱ , x_۲ \geq ۰$$



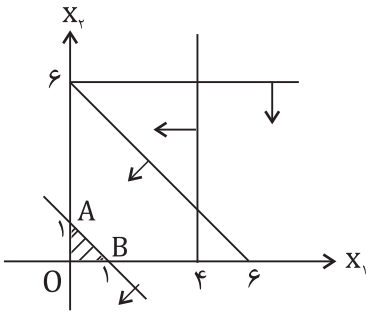
منطقه موجه، چند ضلعی OABC می باشد، چون این ناحیه در هر سه محدودیت مشترک است.

منطقه موجه مدل زیر را رسم کنید؟

$$Maxz = x_۱ + x_۲$$

$$st: \begin{cases} x_۱ \leq ۴ \\ x_۲ \leq ۶ \\ x_۱ + x_۲ \leq ۶ \\ x_۱ + x_۲ \leq ۱ \end{cases}$$

$$x_۱ , x_۲ \geq ۰$$



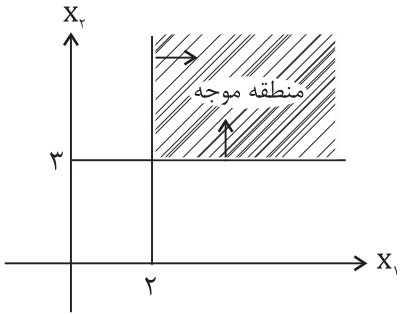
منطقه موجه، مثلث OAB است، مشاهده می گردد که وجود این محدودیت، سه محدودیت دیگر را بی اثر کرده است.

منطقه موجه مدل زیر را رسم کنید؟

$$Maxz = ۲x_۱ + x_۲$$

$$st: \begin{cases} x_۱ \geq ۲ \\ x_۲ \geq ۳ \end{cases}$$

$$x_۱ , x_۲ \geq ۰$$

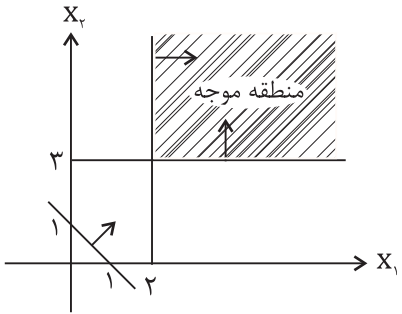

X_2
منطقه موجه
۳
۲
X_1

منطقه موجه مدل زیر را رسم کنید؟

$$Maxz = ۲x_۱ + x_۲$$

$$\begin{cases} x_۱ \geq ۲ \\ x_۲ \geq ۳ \\ x_۱ + x_۲ \geq ۱ \end{cases}$$

$$x_۱ , x_۲ \geq ۰$$

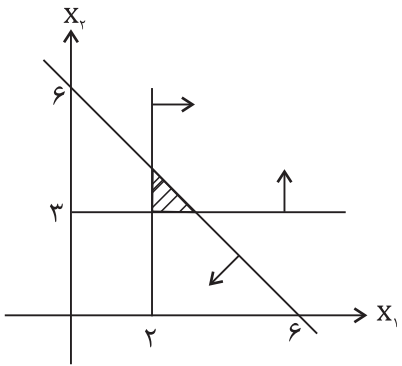

X_2
منطقه موجه
۳
۱
۱
۲
X_1

منطقه موجه مدل زیر را رسم کنید؟

$$Maxz = ۲x_۱ + x_۲$$

$$\begin{cases} x_۱ \geq ۲ \\ x_۲ \geq ۳ \\ x_۱ + x_۲ \leq ۶ \end{cases}$$

$$x_۱ , x_۲ \geq ۰$$

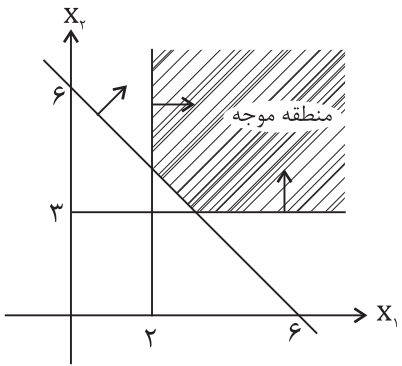

X۲
۶
۳
X۱
۲
۶

منطقه موجه مدل زیر را رسم کنید؟

$$Maxz = ۲x_۱ + x_۲$$

$$\begin{cases} x_۱ \geq ۲ \\ x_۲ \geq ۳ \\ x_۱ + x_۲ \geq ۶ \end{cases}$$

$$x_۱ , x_۲ \geq ۰$$


X۲
۶
۳
منطقه موجه
X۱
۲
۶

یک محدودیت با مقدار عدد سمت راست صفر را چگونه رسم می کنیم؟

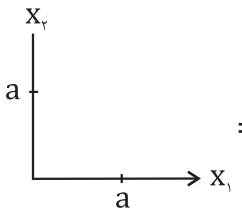
۲ ص ۱۷

برای رسم محدودیت هایی با مقدار سمت راست صفر، محدودیت را برابر با مقدار دلخـواه a (یـا یـک عدد) قرار داده و مختصات دو نقطه را به ازای a بدست می آوریم و خط مربوطه را رسـم مـی کنـیم، سپس خط مربوطه را با همان شیب به مقداری جابجا می کنـیم کـه از مبـدأ مختصـات عبـور کنـد، سپس همانند محدودیت های عادی، منطقه موجه آن محدودیت را شناسایی می نمائیم.

محدودیت $۲x_۱ + x_۲ = ۰$ را رسم کنید (بدون تعیین منطقه موجه)؟

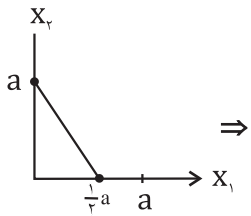
محدودیت را برابر a قرار می دهیم و روی محـــورها یک مقـــدار فرضـی a را در نظـــر می گیـــریم ($۲x_۱ + x_۲ = a$) به ازای a ، محدودیت را رسم می کنیم، سپس خط را تا جایی جابجا می کنیم (به همان موازات) که از نقطه مبدأ عبور کند.

$$۲x_۱ + x_۲ = a \rightarrow \begin{matrix} (x_۱ = ۰ \ , \ x_۲ = a) \\ (x_۱ = \frac{۱}{۲}a \ , \ x_۲ = ۰) \end{matrix}$$



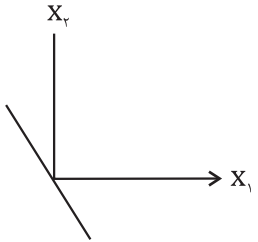
شکل ۱: مقدار فرضی a

⇒



شکل ۲: رسم محدودیت به ازاء مقدار فرضی a

⇒



شکل ۳: انتقال خط با همان شیب تا عبور از مبدأ مختصات

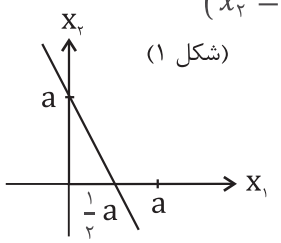
محدودیت $۲x_۱ + x_۲ \leq ۰$ را رسم کنید؟

(با فرض $x_۱ , x_۲ \geq ۰$)

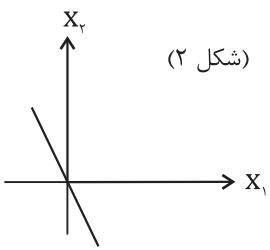
معادله حدی محدودیت را رسم می کنیم (شکل ۱ و ۲)

منطقه موجه را با قرار دادن یک نقطه همانند (۰ و ۲) تعیین می کنیم. بدیهی است قرار دادن نقطه (۰ و ۰) در چنین محدودیت هایی که عدد سمت راست آنها هم صفر است، کمکی به تعیین منطقه موجه نمی کند.

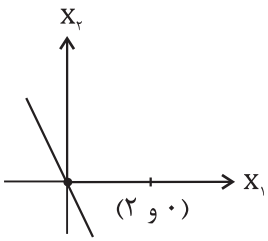
$$۲x_۱ + x_۲ = a \rightarrow \begin{cases} x_۱ = \frac{۱}{۲}a \\ x_۲ = a \end{cases}$$



(شکل ۱)



(شکل ۲)



(۰ و ۲)

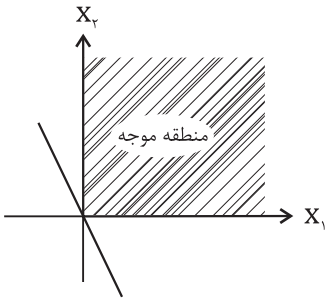
چون (۰ و ۲) در محدودیت صدق نمی کند، فقط نقطه مبدأ مختصات جزء منطقه موجه محدودیت است.

محدودیت $۲x_۱ + x_۲ \geq ۰$ را رسم کنید؟

(با فرض $x_۱ , x_۲ \geq ۰$)

معادله حدی را رسم می کنیم.

منطقه موجه را با قرار دادن یک نقطه همانند (۰ و ۲) تعیین می کنیم. چون این نقطه در محدودیت صدق می کند، پس سمتی از خط که در ربع اول قرار دارد (با توجه به شرط متغیرها) منطقه موجه محدودیت است.



محدودیت $-۲x_۱ + x_۲ \leq ۰$ را رسم کنید؟

(با فرض $x_۱ , x_۲ \geq ۰$)

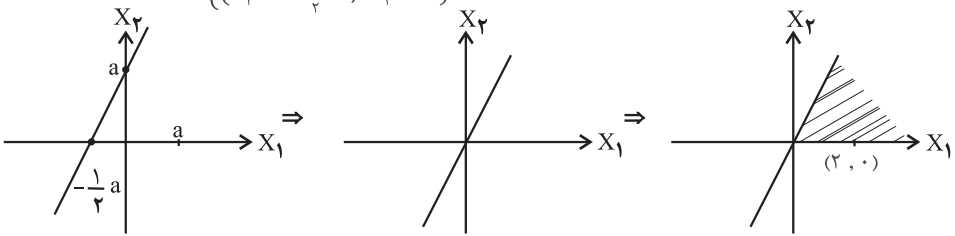
+ رسم معادله ی حدی به ازای سمت راست a (شکل ۱)

+ جابجایی معادله حدی به جهت عبور از مبداء (شکل ۲)

$$-۲x_۱ + x_۲ = ۰$$

+ قرار دادن یک نقطه در معادله و تعیین منطقه موجه (شکل ۳)

$$-۲x_۱ + x_۲ = a \rightarrow \begin{cases} (x_۱ = ۰ \ , \ x_۲ = a) \\ (x_۱ = -\frac{۱}{۲}a \ , \ x_۲ = ۰) \end{cases}$$



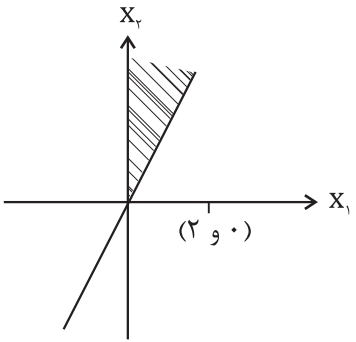
شکل(۱) شکل (۲) شکل (۳)

نقطه ی (۰ , ۲) به عنوان مثال در نامعادله ی محدودیت صدق می کند.

* بدیهی است قرار دادن نقطه (۰ و ۰) در محدودیت، کمکی در تعیین منطقه موجه نمی کند، از این رو نقطه دیگری را قرار می دهیم.

محدودیت $-۲x_۱ + x_۲ \geq ۰$ را رسم کنید؟

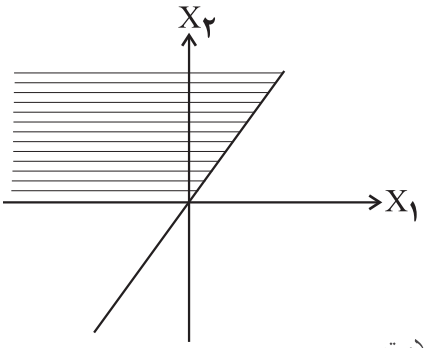
(با فرض $x_۱ , x_۲ \geq ۰$)



(۰ و ۲) در محدودیت صدق نمی کند، پس منطقه سمت دیگـــر خط (و خود خط) که در منطقه اول قرار دارد، منطقه موجه محدودیت است.

محدودیت $-2x_1 + x_2 \geq 0$ را در حالت ($x_2 \geq 0$ و x_1 آزاد در علامت) رسم کنید؟

۲ ص ۱۹

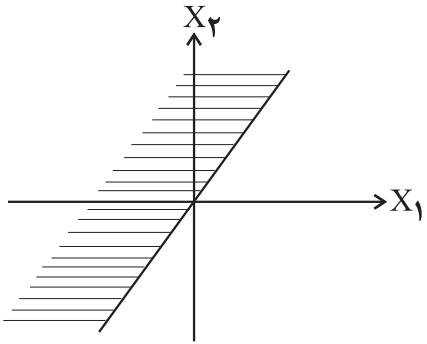


$x_۲ \geq ۰$

$x_۱$ آزاد در علامت

محدودیت $-۲x_۱ + x_۲ \geq ۰$ را در حالت ($x_۲$ و $x_۱$ هر دو آزاد در علامت) رسم کنید؟

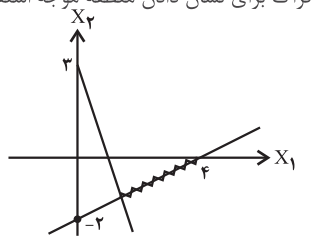
۲ ص ۱۹

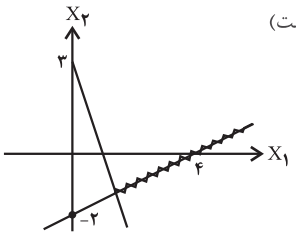

X۲
X۱

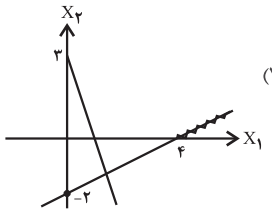
اگر محدودیت های مسأله ای به صورت زیر باشد، کدامیک از اشکال، نشان دهنده منطقه موجه آن است؟ (از خط زیگزاگ برای نشان دادن منطقه موجه استفاده شده است)

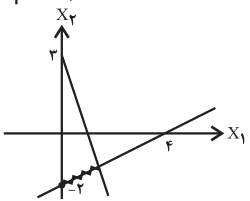
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 4 \\ 3x_1 + x_2 \geq 3 \end{cases}$$

x_1 و x_2 آزاد در علامت

۱)


۲)


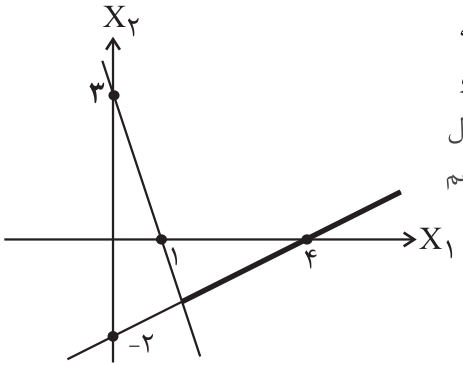
۳)


۴)


[سراسری، مدیریت، ۸۱]

گزینه ۲

با توجه به آزاد در علامت بودن هر دو متغیر، منطقه موجه می تواند در هر چهار ربع باشد، از اینرو منطقه موجه بخشی از خط مربوط به محدودیت اول است که در منطقه ی قابل قبول محدودیت دوم هم صدق کند.



جواب بهینه ی یک مدل برنامه ریزی خطی همواره بر روی یک ..... واقع است.

۱۶ ص ۱۶

نقطه ی گوشه

در Lp (برنامه ریزی خطی = Linear Programing) همواره جـواب بهینـه در یـک ..... قرار دارد.

۱ ص ۴۱

نقطه ی گوشه ی موجه

(البته در جواب بهینه چندگانه، جواب در دو نقطه ی گوشه ی موجه برابر خواهد بود که در ادامه توضیح داده خواهد شد)

نقطه ی گوشه نقطه ای است که از برخورد حداقل دو ..... حاصل شده باشد.

۱۶ ص ۱۶

معادله حدی

معادلات معرف چه معادلاتی هستند؟

۳ ص ۲۳

آن معادلات حدی ای هستند که جواب گوشه را مشخص می کنند.

به علت ..... بودن منطقه موجه در برنامه ریزی خطی، نقطه بهینه در یکی از نقاط گوشه ناحیه ی جواب قرار دارد.

۲۰ ص ۲۱

محدب

هر نقطه ی گوشه بیانگر یک جواب ..... است.

۴ ص ۴۴

اساسی

* یعنی جوابی که موجه است و ممکن است بهینه باشد.

به منظور پیدا کردن جواب بهینه در روش ترسیمی از چه روشهایی می توان استفاده کرد؟

۱ ص ۴۱

۱- بررسی نقاط گوشه ی منطقه موجه

۲- روش آزمون و خطا (رسم تابع هدف به ازاء یک مقدار فرضی برای z و حرکـت دادن آن در جهت بهبود جواب)

در روش «بررسی نقاط گوشه منطقه موجه» برای پیدا کردن جواب بهینه چه می کنیم؟

۱ ص ۴۱

مختصات نقاط گوشه ی منطقه موجه را بدست آورده و در تابع هدف قرار مـی دهـیم و آن نقطـه ای که مقدار تابع هدف را بهینه نماید، به عنوان نقطه ی مربوط به جواب بهینه انتخاب می نمائیم.

برای بدست آوردن جواب بهینه در یک مسأله برنامه ریزی خطی دو متغیره، اگر نخواهیم تابع هـدف را رسم کنیم، می توانیم ..... .

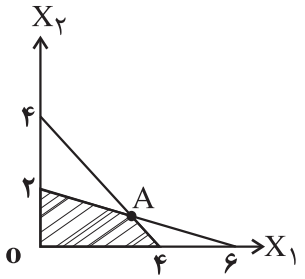
مختصات تمام نقاط گوشه ای منطقه موجه را بدست آورده و در تابع هدف قرار دهیم تا مقدار جواب بهینه مشخص گردد.

(چرا فقط نقاط گوشه ای؟ چون در برنامه ریزی خطی و بغیر از موارد خاص، جواب بهینه لزوماً در یک **نقطه گوشه ای** قرار دارد)

با توجه به دو محدودیت و رسم آنها در شکل زیر، مختصات نقطه ی A را بدست آورید؟

$$\begin{cases} x_۱ + x_۲ \leq ۴ \\ x_۱ + ۳x_۲ \leq ۶ \end{cases}$$

$$x_۱ , x_۲ \geq ۰$$



۱) معادله حدی دو محدودیت را همزمان در نظر می گیریم

۲) یکی از محدودیت ها را در عددی خاص ضرب می کنیم و با محدودیت دیگر جمع می نمائیم (عددی که در محدودیت ضرب می شود باید طوری انتخاب شود که پس از انجام عملیات مرحله ۲، یکی از متغیرها صفر شود)

۳) مقدار یکی از متغیرها بدست آمده است

۴) مقدار متغیر قبلی را در یکی از محدودیت ها قرار داده و مقدار متغیر دیگر را بدست می آوریم

۱)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 + 3x_2 = 6 \end{cases}$$

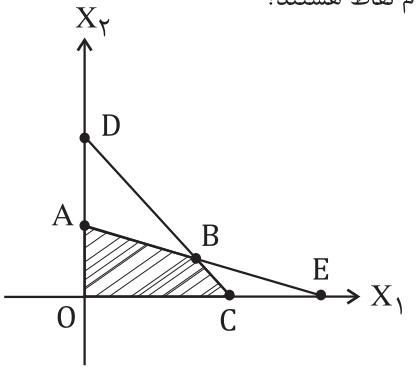
۲) محدودیت اول را در (۱-) ضرب می کنیم تا پس از جمع دو محدودیت با هم، x_1 حذف شود.

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 = -4 \\ x_1 + 3x_2 = 6 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع دو محدودیت}} 2x_2 = 2$$

۳)
$$2x_2 = 2 \quad \rightarrow \quad x_2 = 1$$

۴)
$$x_1 + 1 = 4 \quad \rightarrow \quad x_1 = 3$$

در منطقه موجه شکل زیر، نقاط گوشه ای کدام نقاط هستند؟



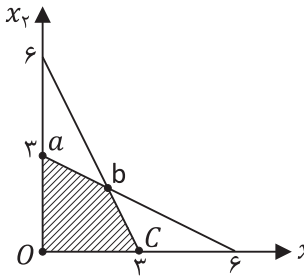
نقاط گوشه ای منطقه موجه C و B و A و O هستند.

(برای یافتن جواب، باید مختصات این نقاط را به دست آورد و آنها را در تابع هدف قرار داد، هر کدام مقدار تابع هدف را به بهترین مقدار رساند، نقطه بهینه است)

مختصات نقاط گوشه ای مدل زیر را بدست آورید؟

$$Max\ z = ۲x_۱ + ۳x_۲$$
$$\begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ \leq ۶ \\ ۲x_۱ + x_۲ \leq ۶ \end{cases}$$
$$x_۱ , x_۲ \geq ۰$$

ابتدا مدل را رسم می‌کنیم:



مختصات سه نقطه ی C و a و o مشخص است و نیازی به محاسبه ندارد:

$$O(۰,۰)\ ,\qquad a(۰,۳)\ ,\qquad C(۳,۰)$$

مختصات نقطه d را نیز با چهار مرحله گفته شده محاسبه می کنیم:

$$\begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ \le ۶ \\ ۲x_۱ + x_۲ \le ۶ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -۲x_۱ - ۴x_۲ = -۱۲ \\ ۲x_۱ + x_۲ = ۶ \end{cases} \Longrightarrow -۳x_۲ = -۶ \Longrightarrow x_۲ = ۲$$

پس مختصات نقطه ی b هم (۲ و ۲) است.

* معادله حدی محدودیت اول را در (۲-) ضـرب کردیم و با معادله حدی محدودیت دوم جمع کردیم. با این کار فقط $x_۲$ در معادله جدید باقی می ماند و مقدارش را حساب می کنیم ($x_۲$=۲)، بعد با قرار دادن این مقدار در یکی از معادلات حدی، مقدار متغیر دیگر را هم برای این نقطه به دست می آوریم.

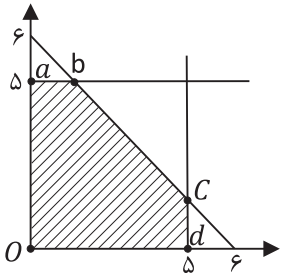
مختصات نقاط گوشه ای مدل زیر را بدست آورید:

$$Max\ z = ۴x_۱ + ۶x_۲$$

$$\begin{cases} x_۱ \leq ۵ \\ x_۲ \leq ۵ \\ x_۱ + x_۲ \leq ۶ \end{cases}$$

$x_۱$ و $x_۲ \geq ۰$

مدل را رسم می کنیم:



باید مختصات نقاط d و c و b و a و o را بدست آوریم.

مختصات نقاط d و a و o واضح است:

$$o(۰\,,۰)\ ,\ a(۰\,,۵)\ ,\ d(۵\,,۰)$$

مختصات نقاط b و c هم به شکل زیر به دست می آید.

نقطه ی b از برخورد دو محدودیت زیر بدست آمده،

معادلات حدی آنها را در هم قطع داده و مختصات b را

بدست می آوریم: $\begin{cases} x_۱ + x_۲ \le ۶ \\ x_۲ \le ۵ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_۱ + x_۲ = ۶ \\ -x_۲ = -۵ \end{cases} \rightarrow x_۱ = ۱$ و $x_۲ = ۵ \rightarrow b(۱\,,۵)$

برای نقطه c هم همین کار را می کنیم:

$$\begin{cases} x_۱ + x_۲ \le ۶ \\ x_۱ \le ۵ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_۱ + x_۲ = ۶ \\ -x_۱ = -۵ \end{cases} \rightarrow x_۲ = ۱ \text{ و } x_۱ = ۵ \rightarrow c(۵,۱)$$

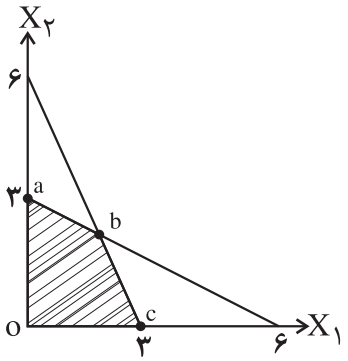
مختصات نقاط گوشه ی مدل زیر را بدست آورده و جواب بهینه را تعیین کنید؟

$$Maxz = ۲x_۱ + ۳x_۲$$
$$\begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ \leq ۶ \\ ۲x_۱ + x_۲ \leq ۶ \end{cases}$$
$$x_۱ , x_۲ \geq ۰$$

(با استفاده از روش اول بدست آوردن جواب در حالت ترسیمی = بررسی نقاط گوشه ی منطقه موجه)

۱ ص ۴۱

مختصات نقاط گوشه را به دست آورده و در تابع هدف قرار می دهیم، چون تابع هدف Max سازی است، هر کدام بیشترین مقدار را ارائه داد، آن نقطه، نقطه بهینه است.



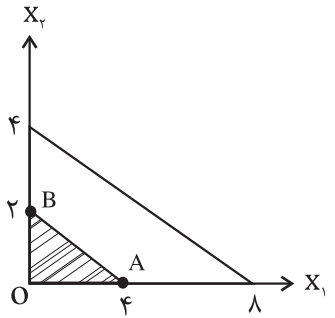
$$o(۰\,,۰) \rightarrow z = ۲(۰) + ۳(۰) = ۰$$
$$a(۰\,,۳) \rightarrow z = ۲(۰) + ۳(۳) = ۹$$
$$c(۳\,,۰) \rightarrow z = ۲(۳) + ۳(۰) = ۶$$
$$b(۲\,,۲) \rightarrow z = ۲(۲) + ۳(۲) = ۱۰^*$$
$$z^* = ۱۰\ ,\ x_۱^* = ۲\ ,\ x_۲^* = ۲$$

نقطه (۲ و ۲) b جواب بهینه است.

در مدل زیر، جواب بهینه را بدست آورید؟

$$Maxz = ۲x_۱ + x_۲$$
$$\begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ \leq ۴ \\ x_۱ + ۲x_۲ \leq ۸ \end{cases}$$
$$x_۱ , x_۲ \geq ۰$$

ابتدا حالت ترسیمی را رسم می کنیم:



مشاهده می شود که محدودیت دوم زائد است.

همان طور که از شکل پیداست مختصات سه نقطه گوشه ای و جواب بهینه عبارتست از:

$O(۰ , ۰) \rightarrow Z=۲(۰)+۰=۰$

$A(۴ , ۰) \rightarrow Z=۲(۴)+۰=۸$

$B(۰ , ۲) \rightarrow Z=۲(۰)+۲=۲$

نقطه $A(۴ , ۰)$ با $Z^*=۸$ جواب بهینه است.

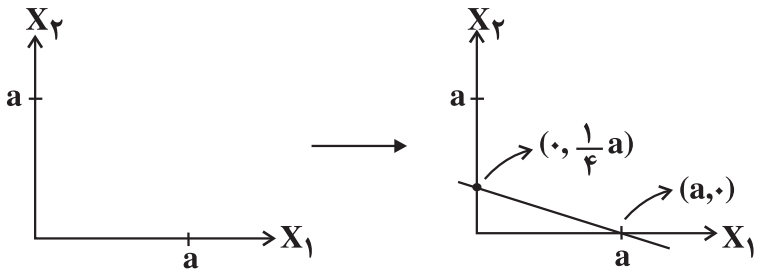
روش رسم کردن تابع هدف را شرح دهید؟

تابع هدف را معادل مقداری فرضی مانند یک عدد یا یک مقدار مشخص (فرضاً a) قرار می دهیم، بـه ترتیب متغیرها را برابر صفر قرار داده و مقدار متغیر دیگر را تعیین می کنیم (بدست آوردن دو نقطه) و بعد خط را رسم می نمائیم.

تابع هدف زیر را رسم کنید؟

$$Maxz = x_1 + 4x_2$$

$$x_۱ + ۴x_۲ = a \quad \rightarrow \quad \left(۰\,,\ \frac{۱}{۴}a\right), (a\,, ۰)$$



در نظر گرفتن مقدار فرضی a روی دو محور

رسم براساس مقدار فرضی a

با روش رسم تابع هدف به ازاء یک مقدار فرضی برای z، چگونه جواب بهینه را پیدا می کنیم؟

به z یک مقدار عددی فرضی دلخواه داده و تابع هدف را به ازاء آن رسم می کنیم. برای تابع هدف Max خط را به موازات خود و در جهتی که مقدار تابع هدف را افزایش دهد حرکت می دهیم و این کار را آن قدر ادامه می دهیم که خط تابع هدف با آخرین نقطه ای که در منطقه موجه است مماس شود. این نقطه، نقطه ی بهینه است. در صورتی که تابع هدف به صورت Min باشد، جهت حرکت خط تابع هدف بایستی به گونه ای باشد که مقدار z را کاهش دهد.

به خطوط رسم شده تابع هدف با مقدار فرضی دلخواه ..... گفته می شود.

۱ ص ۴۲

خطهای هم سود

برای مدل زیر، مقدار z (جواب بهینه) را با روش ترسیمی تابع هدف به دست آورید؟

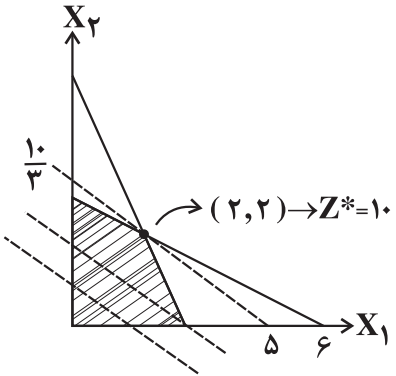
$$Maxz = ۲x_۱ + ۳x_۲$$
$$\begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ \leq ۶ \\ ۲x_۱ + x_۲ \leq ۶ \end{cases}$$
$$x_۱ \text{ و } x_۲ \geq ۰$$

(با روش دوم بدست آوردن جواب در روش ترسیمی = رسم تابع هدف)

۱ ص ۴۲

تابع هدف را رسم می کنیم. آنقدر آن را به سمت بالا حرکت می دهیم که با آخرین نقطه منطقه موجه مماس شود. خطهایی که به صورت خط چین رسم شده اند بیانگر خطهای هم سود تابع هدف می باشند.

$$Maxz = ۲x_۱ + ۳x_۲$$
$$\downarrow$$
$$۲x_۱ + ۳x_۲ = a$$
$$\downarrow$$
$$\left(۰ , \frac{۱}{۳}a\right), \left(\frac{۱}{۲}a , ۰\right)$$

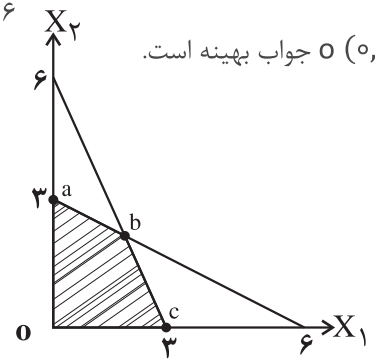


* چون تابع هدف Max سازی و ضریب متغیرها در آن مثبت است، حرکت تابع هدف به سمت راست (بالا) مقدار آن را بهبود می دهد.

جواب بهینه مدل زیر را با استفاده از روش اول بدست آورید؟

$$Minz = ۲x_۱ + ۳x_۲$$
$$\begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ \leq ۶ \\ ۲x_۱ + x_۲ \leq ۶ \end{cases}$$
$$x_۱ \text{ و } x_۲ \geq ۰$$

$o(۰,۰) \rightarrow z^* = ۰$
$a(۰,۳) \rightarrow z = ۹$
$b(۲,۲) \rightarrow z = ۱۰$
$c(۳,۰) \rightarrow z = ۶$

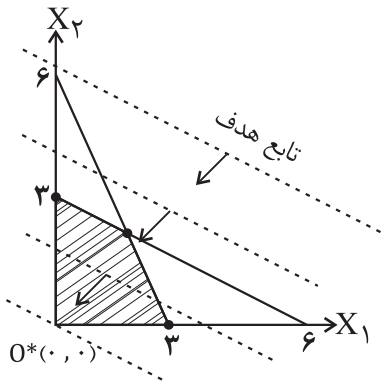


با توجه به Min بودن تابع هدف، نقطه (۰,۰) o جواب بهینه است.

جواب بهینه مدل زیر را با استفاده از روش دوم بدست آورید؟

$$Minz = ۲x_۱ + ۳x_۲$$
$$\begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ \leq ۶ \\ ۲x_۱ + x_۲ \leq ۶ \end{cases}$$
$$x_۱ \text{ و } x_۲ \geq ۰$$

چون تابع هدف Min سازی و ضریب متغیرها در آن مثبت است، حرکت تابع هدف به سمت چپ (پائین) مقدار آن را بهبود می دهد.



$Z^*=۰ \ , \ X^*_۱=۰ \ , \ X^*_۲=۰$

منطقه ی موجه مدل زیر چیست و جواب بهینه کدام است؟ (با استفاده از روش بررسی نقاط گوشه)

$$Minz = ۲x_۱ + ۳x_۲$$
$$\begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ \leq ۶ \\ ۲x_۱ + x_۲ \leq ۶ \\ x_۱ \geq ۱ \\ x_۲ \geq ۱ \end{cases}$$
$$x_۱ \text{ و } x_۲ \geq ۰$$

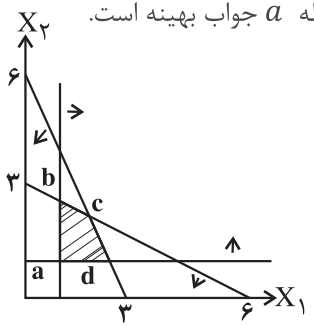
$a(۱,۱) \rightarrow z^* = ۵$

$b\left(۱,\frac{۵}{۲}\right) \rightarrow z = \frac{۱۹}{۲}$

$c(۲,۲) \rightarrow z = ۱۰$

$d\left(\frac{۵}{۲},۱\right) \rightarrow z = \frac{۱۶}{۲}$

با توجه به *Min* بودن تابع هدف، نقطه a جواب بهینه است.



* اگر تابع هدف Max سازی بود، جواب بهینه نقطه C(۲ و ۲) و Z*=۱۰ بود.

منطقه موجه و جواب بهینه مدل زیر چیست؟

$$Maxz = ۲x_۱ + ۳x_۲$$

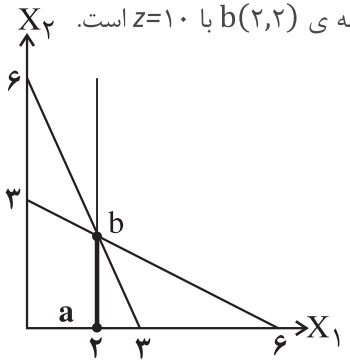
$$\begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ \leq ۶ \\ ۲x_۱ + x_۲ \leq ۶ \\ x_۱ = ۲ \end{cases}$$

$x_۱$ و $x_۲$ ≥ ۰

منطقه موجه، پاره خط ab است و نقاط گوشه عبارتند از:

$$a(۲,۰) \rightarrow z = ۴$$
$$b(۲,۲) \rightarrow z^* = ۱۰$$

جواب بهینه، نقطه ی b(۲,۲) با z=۱۰ است.



منطقه موجه و جواب بهینه مدل زیر چیست؟

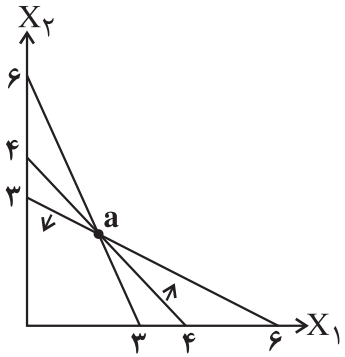
$$Maxz = ۲x_۱ + ۳x_۲$$

$$\begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ \leq ۶ \\ ۲x_۱ + x_۲ \leq ۶ \\ x_۱ + x_۲ \geq ۴ \end{cases}$$

$x_۱$ و $x_۲$ ≥ ۰

منطقه ی موجه نقطه a می باشد و جواب بهینه نیز همین نقطه است

$$a(۲,۲) \rightarrow z^* = ۱۰$$



برای به دست آوردن جواب در روش ترسیمی، بهتر است مختصات نقاط گوشه ای را به دست آورده و در تابع هدف قرار دهیم، و یا با رسم تابع هدف و حرکت دادن آن در جهت بهبود جواب به جواب بهینه برسیم؟

هر دو روش کارا هستند. اما به دست آوردن مختصات نقاط گوشه ای و قرار دادن آنها در تابع هدف جهت به دست آوردن جواب بهینه دقیق تر است.

* بعنوان یک روش تلفیقی مدل را رسم کنید، تابع هدف را هم رسم کرده و جهت حرکت آن را مشخص کنید، اگر یک نقطه بصورت واضحی دربردارنده جواب بود، مختصات آن را بدست آورده و در تابع هدف قرار می دهیم تا مقدار جواب را هم بدست آوریم. اگر هم دو یا چند نقطه مشکوک به جواب بودند (چون رسم دستی خیلی دقیق نیست)، مختصات همه آنها را در تابع هدف قرار می دهیم تا به جواب برسیم.

هنگامی که منطقه موجه یک ..... باشد، تابع هدف در تعیین جواب بهینه آن مسأله هیچ نقشی ندارد، چون هیچ حق انتخابی نداریم.

۱ ص۴۵

نقطه

در مدل هایی که منطقه موجه تنها یک ..... باشد، مدل چه *Max* و چه *Min* باشد جواب یکسان است.

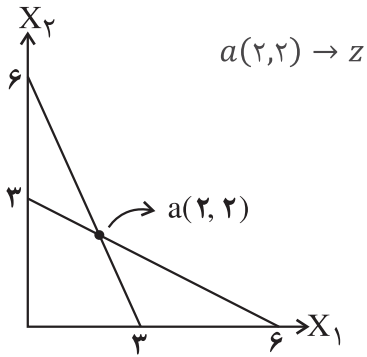
- ☐
- ☐
- ☐
- ☐
- ☐ ۱۴ ص ۹۷

نقطه

جواب بهینه مدل زیر را بیابید؟

$$Max z = ۲x_۱ + ۳x_۲$$
$$\begin{cases} ۲x_۱ + x_۲ = ۶ \\ x_۱ + ۲x_۲ = ۶ \end{cases}$$
$$x_۱ \text{ و } x_۲ \geq ۰$$

جواب بهینه نقطه ی a است (منطقه موجه نیز همان نقطه A است)

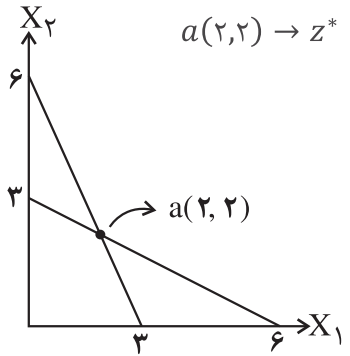


$$a(۲,۲) \rightarrow z^* = ۱۰$$

جواب بهینه مدل زیر را بیابید؟

$$Minz = ۲x_۱ + ۳x_۲$$
$$\begin{cases} ۲x_۱ + x_۲ = ۶ \\ x_۱ + ۲x_۲ = ۶ \end{cases}$$
$$x_۱ \text{ و } x_۲ \geq ۰$$

جواب بهینه (و منطقه موجه) همان نقطه a است



$$a(۲,۲) \rightarrow z^* = ۱۰$$

«نکته بسیار مهم»

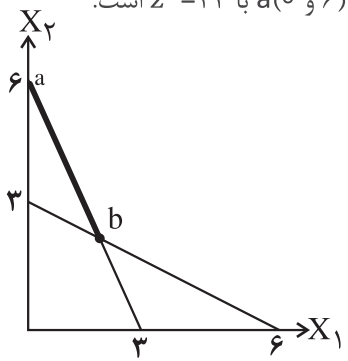
هنگامی که منطقه موجه یک نقطه باشد، تغییر تابع هدف از Max به Min (یا بالعکس)، هیچ تغییری در جواب بهینه ایجاد نمی کند (همان جواب حالت قبل، بهینه می ماند)

جواب بهینه مدل زیر چیست؟

$$Max z = x_۱ + ۴x_۲$$
$$\begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ \geq ۶ \\ ۲x_۱ + x_۲ = ۶ \end{cases}$$
$$x_۱ \text{ و } x_۲ \geq ۰$$

منطقه موجه پاره خط ab است

جواب بهینه نقطه ی (۶ و ۰)a با z^*=۲۴ است.



منطقه موجه در یک مسئله ترسیمی دو متغیره می تواند (در صورت وجود) یک .....، یک ..... یا یک ..... باشد.

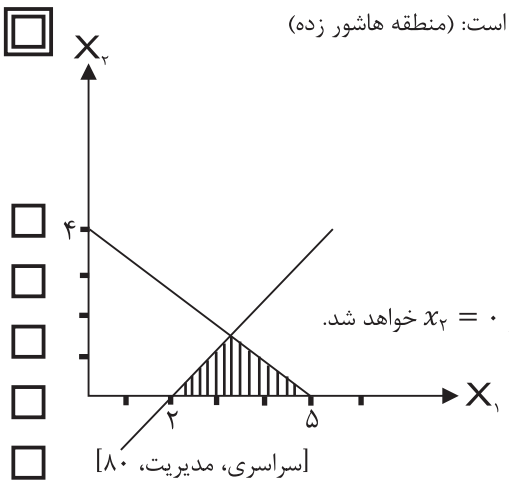
۱ ص ۴۳

سطح – خط – نقطه

(منطقه موجه نامحدود و مسئله بدون منطقه موجه نیز وجود دارد، که در ادامه مورد معرفی و بررسی قرار می گیرند)

منطقه موجه یک مسأله برنامه ریزی خطی به صورت زیر است: (منطقه هاشور زده)

در صورت اضافه شدن محدودیت $x_1 \geq 5$:



۱) منطقه موجه تغییر نمی کند.

۲) مسأله منطقه موجه نخواهد داشت.

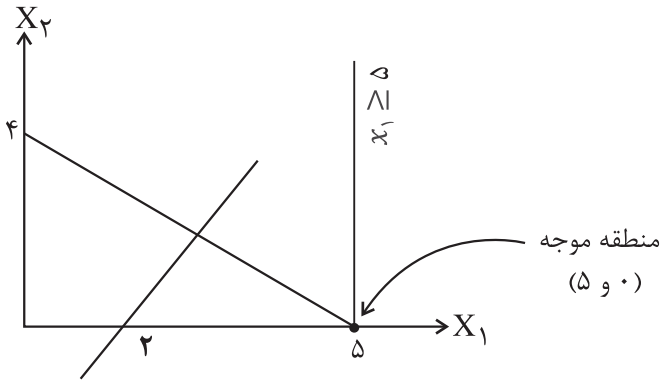
۳) منطقه موجه خط $x_1 = 5$ خواهد شد.

۴) منطقه موجه نقطه ای به مختصات $x_1 = 5$ و $x_2 = 0$ خواهد شد.

[سراسری، مدیریت، ۸۰]

گزینه ۴

با اضافه شدن این محدودیت، تنها منطقه ی مشترک بین ۳ محدودیت، نقطه ای به مختصات (۰ و ۵) است.



مدل برنامه ریزی خطی زیر مفروض است:

$$
\begin{aligned}
& Max\ z = ۷x_۱ + ۲x_۲ \\
& s.t. \quad x_۱ + x_۲ = ۱۰۰ \\
& \qquad x_۲ \leq ۵۵ \\
& \qquad ۲x_۱ + x_۲ \leq ۱۸۰ \\
& \qquad x_۱, x_۲ \geq ۰
\end{aligned}
$$

اگر محدودیت $x_۱ + x_۲ = ۱۰۰$ به صورت $x_۱ + x_۲ \leq ۱۰۰$ تبدیل شود، کدامیک از گزینه های زیر صحیح است؟

۱) فضای جواب تغییر می کند و مقدار تابع هدف بهینه برابر ۶۰۰ می شود.

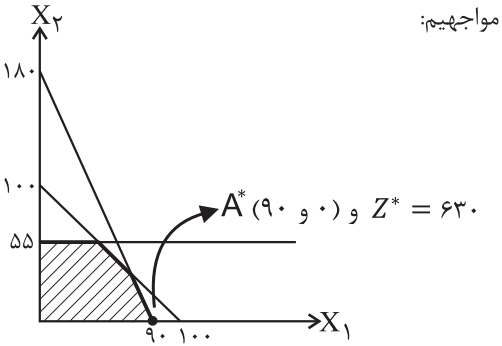
۲) فضای جواب تغییر نمی کند.

۳) فضای جواب تغییر نمی کند و مقدار تابع هدف بهینه هم تغییر نمی کند.

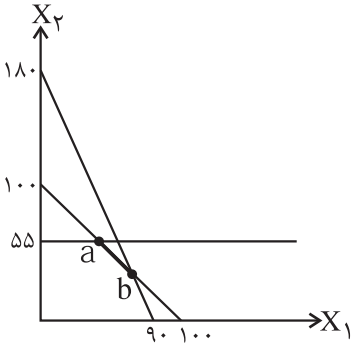
۴) فضای جواب تغییر می کند و مقدار تابع هدف بهینه برابر ۶۳۰ می شود. [آزاد، بازرگانی، ۸۱]

گزینه ۴

اگر علامت محدودیت تساوی باشد با شکل اول و اگر کوچکتر مساوی باشد با شکل دوم و $Z^* = ۶۳۰$ مواجهیم:



شکل ۲



منطقه موجه پاره خط ab

منطقه شدنی برنامه زیر کدام است؟

$$
\begin{aligned}
Max\ C &= ۶x_۱ + ۳x_۲ \\
s.t. \quad & x_۱ \le ۹ \\
& x_۱ + x_۲ \ge ۶ \\
& x_۱ + ۴x_۲ = ۸ \\
& x_۱, x_۲ \ge ۰
\end{aligned}
$$

۱) منطقه شدنی ندارد.

۲) منطقه شدنی نامحدود است.

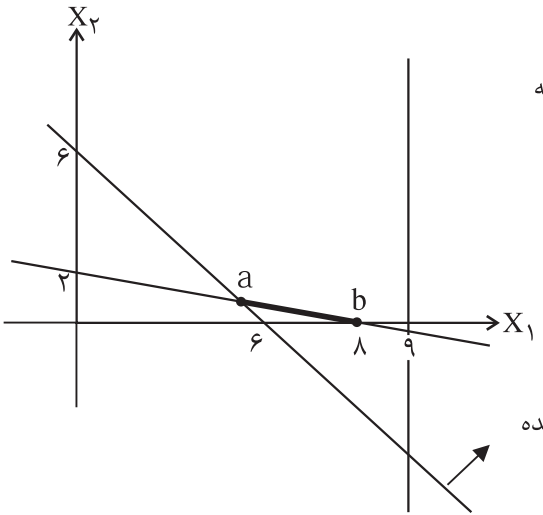
۳) منطقه شدنی یک خط است.

۴) منطقه شدنی یک نقطه است.

[آزاد، بازرگانی، ۸۴]

گزینه ۳

مدل را رسم می کنیم، منظور از منطقه شدنی، همان منطقه موجه است.



منطقه موجه، خط ab است.

* در مورد نداشتن منطقه موجه در آینده صحبت خواهیم کرد.

مدل برنامه ریزی خطی زیر مفروض است:

$$
\begin{aligned}
& Min\ z = x_۱ + x_۲ \\
& s.t. \quad -۳x_۱ + ۲x_۲ \leq ۶ \qquad (۱) \\
& \qquad\ \ x_۱ + x_۲ \leq ۱۰/۵ \qquad (۲) \\
& \qquad\ \ -x_۱ + ۳x_۲ \geq ۶ \qquad (۳) \\
& \qquad\ \ x_۱, x_۲ \geq ۰
\end{aligned}
$$

کدام یک از عبارات زیر در مورد این مسأله مصداق دارد؟

۱) نقطه بهینه این مسأله از محل برخورد خط شماره (۳) و محور $x_۱$ حاصل می شود.

۲) نقطه بهینه این مسأله از محل برخورد خط شماره (۳) و محور $x_۲$ حاصل می شود.

۳) فضای جواب این مسأله متناهی بوده و دارای سه گوشه قابل قبول است.

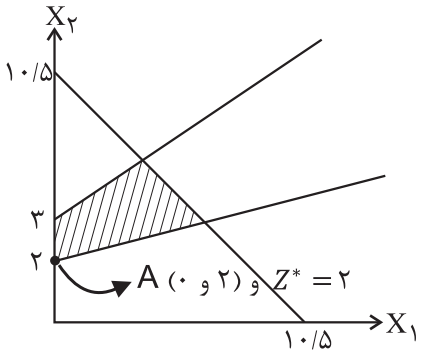
۴) فضای جواب این مسأله نامتناهی بوده و جواب بهینه بر روی خط شماره (۳) قرار دارد.

[آزاد، بازرگانی، ۸۲]

گزینه ۲

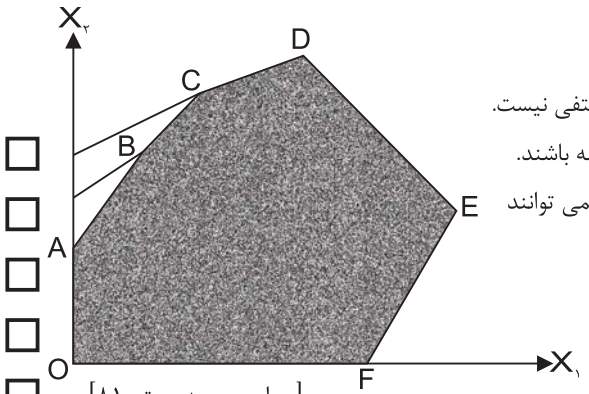
مدل را رسم کرده و جواب بهینه را به دست می آوریم:

(توجه داشته باشید که تابع هدف Min سازی است و ضرایب متغیرهای آن هم مثبتند، حرکت تابع هدف به پائین مقدار آن را کاهش می دهد، از این رو نیازی به محاسبه مختصات سایر نقاط نداریم)



* در مورد فضای جواب نامتناهی در آینده صحبت خواهیم کرد.

فرض کنید شکل زیر منطقه موجه یک مسأله برنامه ریزی خطی با تابع هدف حداکثر کردن را نشان می دهد. در این صورت:



۱) قطعاً نقطه D جواب بهینه است.

۲) شانس بهینگی در نقطه O تحت شرایطی منتفی نیست.

۳) نقطه C و D هم زمان نمی توانند جواب بهینه باشند.

۴) با وجود نقاط B و C و D، نقاط A و E و F نمی توانند شانس بهینگی داشته باشند.

[سراسری، مدیریت، ۸۱]

گزینه ۲

گزینه ۱ اشتباه است چون تابع هدف را نداریم.

گزینه ۳ اشتباه است، چون امکان بهینه بودن همزمان دو نقطه مجاور هم وجود دارد. (در صورت موازی بودن تابع هدف با خط CD)

گزینه ۴ هم اشتباه است چون بهینه بودن هر نقطه ای در منطقه موجه منتفی نیست و این امر بستگی به تابع هدف دارد.

گزینه ۲ صحیح است، بعنوان مثال برای تابع هدف زیر، نقطه بهینه O می باشد.

$$Min\ z = x_1 + x_2$$

* در مورد گزینه ۳ در آینده بیشتر صحبت خواهیم کرد.

در صورتی که z نشان دهنده مقدار تابع هدف بهینه مسأله زیر باشد، مقدار آن برابر خواهد شد با .....

۱) ۸ ۲) ۶

۳) ۴ ۴) ۰

$$Maxz = ۱x_۱ + ۲x_۲$$

$$st: \begin{cases} x_۱ + x_۲ \geq ۰ \\ ۲x_۱ - x_۲ \leq ۰ \\ ۴x_۱ + ۲x_۲ \leq ۰ \end{cases}$$

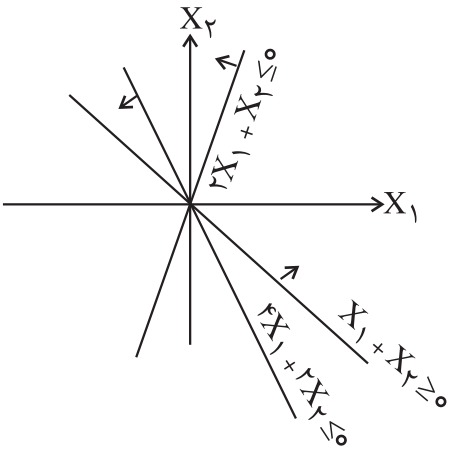
$$x_۱, x_۲ \geq ۰$$

[آزاد، بازرگانی، ۸۱]

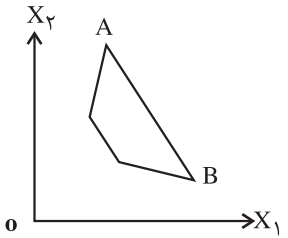
گزینه ۴

منطقه ی موجه و نقطه ی بهینه،

نقطه ی $O\ (0,0)$ است و $Z_0^* = 0$



منطقه موجه یک مسأله برنامه ریزی خطی مطابق شکل زیر است. خط AB منطقه موجه است. کدام عبارت صحیح است؟



۱) همه محدودیت های مسأله به شکل مساوی است.

۲) مسأله دارای دو محدودیت مساوی و دو محدودیت بزرگتر مساوی است.

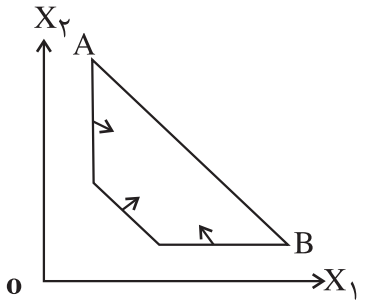
۳) مسأله دارای دو محدودیت مساوی، یک محدودیت بزرگتر مساوی و یک محدودیت کوچکتر مساوی است.

۴) مسأله دارای یک محدودیت مساوی، دو محدودیت بزرگ تر مساوی و یک محدودیت کوچکتر مساوی است.

[آزاد، بازرگانی، ۸۵]

گزینه ۴

تنها یک محدودیت دارای علامت مساوی است (خط *AB*) و سایر محدودیت ها دارای جهت های دیگر هستند:



(بدیهی است که فقط علامت یک محدودیت تساوی می باشد، محدودیت کوچکتر مساوی می تواند ملاً $-x_1-x_2\leq-$ باشد)

منطقه موجه برای مجموعه محدودیت های زیر کدام مورد است؟

$$x_1 + x_2 \leq 4$$
$$-x_1 + 3x_2 \geq 0$$
$$x_1 \leq 3$$

۱) شکل محدب

۲) منطقه موجه وجود ندارد

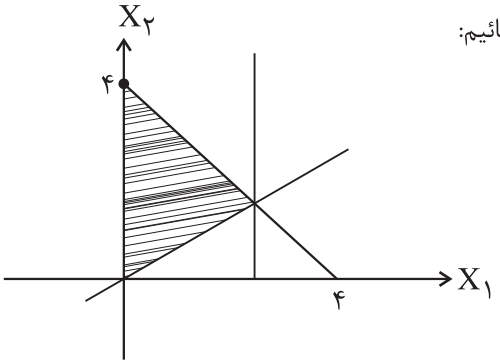
۳) یک نقطه

۴) یک خط

[سراسری، مدیریت، ۷۷]

گزینه ۱

محدودیت دوم را ابتدا به ازای یک مقدار فرضی رسم نموده و سپس آنقدر جابجا می کنیم که از مبدأ عبور کند. دو محدودیت دیگر را نیز رسم می نمائیم:



حالت های خاص در مسائل برنامه ریزی خطی را نام ببرید؟

۱ ص ۴۵

۱- عدم وجود جواب موجه (عدم وجود منطقه موجه یا نشدنی)
۲- منطقه ی موجه نامحدود (بیکران)
۳- جواب بهینه چندگانه
۴- مسأله تبهگن (دژنره)

حالت عدم وجود جواب موجه چیست؟

۱ ص ۴۵

در این مسائل، هیچ منطقه مشترکی بین محدودیت ها وجود ندارد و منطقه موجه شکل نمی گیرد

(واضح است که جواب موجه هم نداریم)

حالت ..... زمانی رخ می دهد که مسأله به طور صحیح فرموله نشده ، و یا دارای تضاد در محدودیت های مربوط به مدل می باشیم.

۱ ص ۴۵

عدم وجود جواب موجه

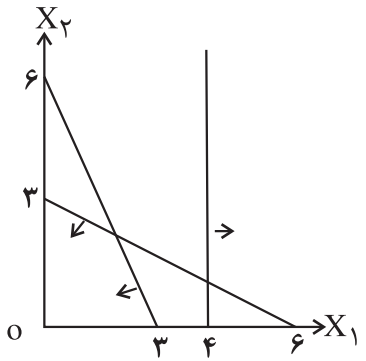
مدل زیر را حل کنید و جواب بهینه را بیابید؟

$$Maxz = ۲x_۱ + ۳x_۲$$

$$\begin{cases} ۲x_۱ + x_۲ \leq ۶ \\ x_۱ + x_۲ \leq ۶ \\ x_۱ \geq ۴ \end{cases}$$

$x_۱$ و $x_۲$ ≥ ۰

منطقه موجهی بین محدودیت ها وجود نداشته و مدل دارای حالت خاص «عدم وجود جواب موجه» می باشد.



جواب بهینه مسأله زیر کدام است؟

$$MinC = x_۱ + x_۲$$
$$(\frac{۲}{۳})x_۱ + (\frac{۴}{۳})x_۲ \leq ۰$$
$$x_۱ - x_۲ \geq ۲$$
$$x_j \geq ۰$$

۱) $x_۱ = ۴$ و $x_۲ = ۲$ و $Z = ۶$

۲) $x_۱ = ۴$ و $x_۲ = ۴$ و $Z = ۸$

۳) $x_۱ = ۱۰$ و $x_۲ = ۲$ و $Z = ۱۲$

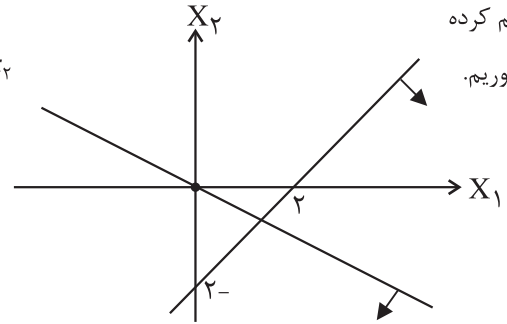
۴) نشدنی

[آزاد، بازرگانی، ۸۶]

گزینه ۴

می دانیم که می توان یک نامعادله را در هر عددی ضرب نمود، بدون آنکه تغییری در مفهوم آن ایجاد شود. جهت ساده تر شدن رسم، محدودیت اول را در عدد ۳ ضرب می کنیم تا ضرایب متغیرهایش از حالت کسری خارج شوند، سپس مدل را رسم کرده و جواب بهینه را به دست می آوریم.

$$Min\ C = x_۱ + x_۲$$
$$\begin{cases} ۲x_۱ + ۴x_۲ \leq ۰ \\ x_۱ - x_۲ \geq ۲ \end{cases}$$
$$x_j \geq ۰$$



همانطور که مشاهده می شود، هیچ فضای مشترکی در منطقه اول، بین محدودیتها وجود ندارد.

حالت خاص «منطقه موجه نامحدود» چگونه است؟

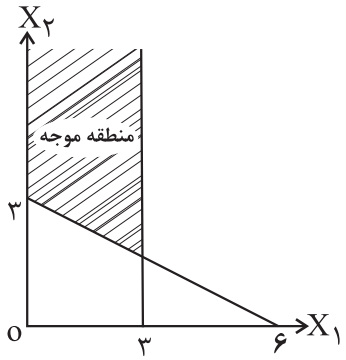
حالتی است که منطقه موجه نامحدود باشد، (تا ∞ ادامه داشته باشد)

منطقه موجه مدل زیر را رسم کنید؟

$$Maxz = ۲x_۱ + ۳x_۲$$
$$\begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ \geq ۶ \\ x_۱ \leq ۳ \end{cases}$$
$$x_۱ \text{ و } x_۲ \geq ۰$$

چه حالت خاصی دارد؟

حالت خاص «منطقه موجه نامحدود»



هنگامی که مسأله دارای منطقه موجه نامحدود باشد، جواب بهینه مسأله می تواند ..... یا ..... باشد.

۱ ص ۴۶

محدود- نامحدود

اگر مدل سازی درست انجام یافته باشد، حالت ..... در جهان واقعی رخ نخواهد داد

۱ ص ۴۶

منطقه موجه نامحدود

وجود ..... در یک مسأله، نشان دهنده ی اشتباه در فرموله کردن آن مسأله باشد.

۱ ص ۴۶

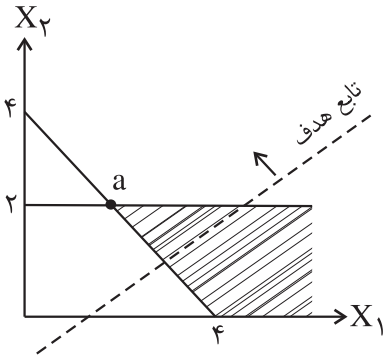
منطقه موجه نامحدود

جواب بهینه مدل زیر چیست؟ چه حالت خاصی دارد؟

$$Maxz = -x_۱ + ۲x_۲$$
$$\begin{cases} x_۱ + x_۲ \geq ۴ \\ x_۲ \leq ۲ \end{cases}$$
$$x_۱ \text{ و } x_۲ \geq ۰$$

۱ ص ۴۷

حالت خاص منطقه موجه نامحدود است اما با توجه به جهت حرکت تابع هدف، جواب محدود و معین است.



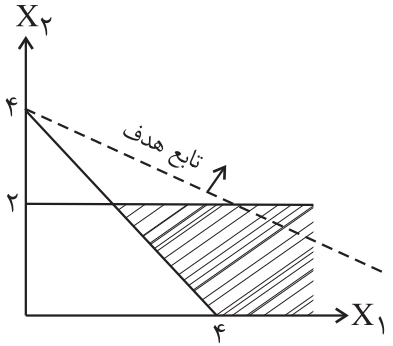
(منطقه موجه نامحدود ولی جواب بهینه محدود)

جواب بهینه مدل زیر چیست؟ چه حالت خاصی دارد؟

$$Maxz = x_۱ + ۲x_۲$$
$$\begin{cases} x_۱ + x_۲ \geq ۴ \\ x_۲ \leq ۲ \end{cases}$$
$$x_۱ \text{ و } x_۲ \geq ۰$$

۱ ص ۴۶

حالت خاص منطقه موجه نامحدود است و با توجه به جهت حرکت تابع هدف، جواب نیز نامحدود است.



(منطقه موجه نامحدود و جواب بهینه نامحدود)

در یک مدل استاندارد (یا متعارف، یعنی تابع هدف Max، محدودیت ها با علامت $\leq$ و اعداد سمت راست مثبت، تمامی متغیرها بزرگتر یا مساوی صفر)، هرگاه ضریب یکی از متغیرها در تمامی محدودیت ها ..... باشد، وضعیت بیکران اتفاق می افتد.

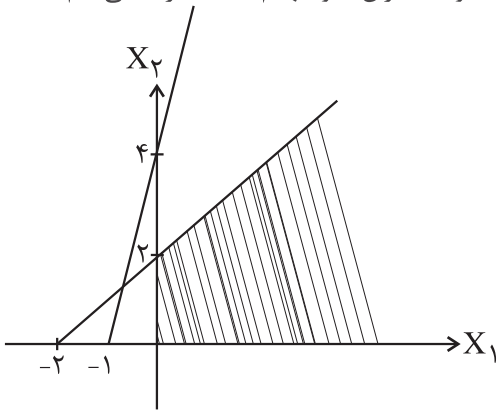
۱۴ ص ۹۲

منفی یا صفر

مدل زیر چه حالت خاصی دارد؟

$$Max z = ۲x_۱ + x_۲$$
$$\begin{cases} -x_۱ + x_۲ \leq ۲ \\ -۴x_۱ + x_۲ \leq ۴ \end{cases}$$
$$x_۱ \text{ و } x_۲ \geq ۰$$

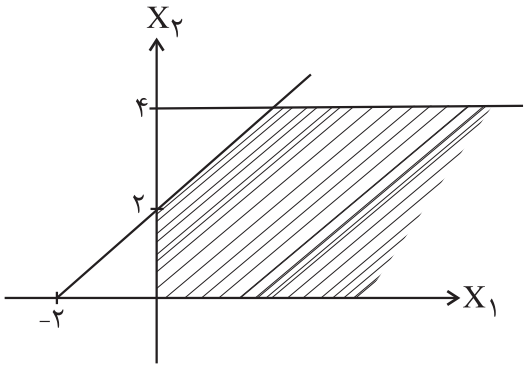
مدل متعارف (استاندارد) است و ضریب x_1 در همه محدودیت ها منفی است، در نتیجه با حالت خاص منطقه موجه نامحدود (بیکران) مواجهیم، حالت ترسیمی هم به شکل زیر است:



مدل زیر چه حالت خاصی دارد؟

$$Maxz = ۲x_۱ + x_۲$$
$$\begin{cases} -x_۱ + x_۲ \leq ۲ \\ x_۲ \leq ۴ \end{cases}$$
$$x_۱ \text{ و } x_۲ \geq ۰$$

مدل استاندارد است و ضریب x_1 در محدودیت ها صفر و منفی است، در نتیجه با حالت خاص بیکران (منطقه موجه نامحدود) مواجهیم، حالت ترسیمی هم به شکل زیر است:



مدل برنامه ریزی خطی زیر مفروض است:

$$
\begin{aligned}
Min\ z &= ۱/۲\, x_۱ + ۱/۹\, x_۲ \\
s.t. \quad & x_۱ + ۳x_۲ \geq ۹۰ \\
& ۵x_۱ + x_۲ \geq ۱۰۰ \\
& ۳x_۱ + ۲x_۲ \geq ۱۲۰ \\
& x_۱, x_۲ \geq ۰
\end{aligned}
$$

کدامیک از گزینه های زیر صحیح است؟

۱) فضای جواب محدود است و مقدار تابع هدف بهینه برابر ۲۵/۸ است.

۲) فضای جواب نامتناهی است و مقدار تابع هدف بهینه هم نامتناهی است.

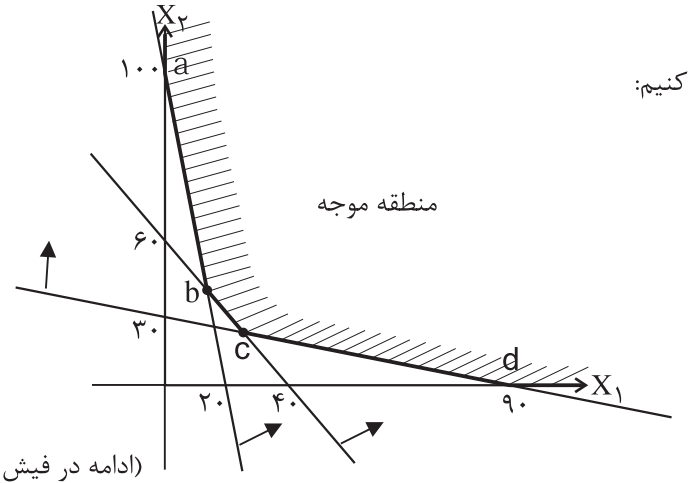
۳) فضای جواب نامتناهی است و مقدار تابع هدف بهینه برابر ۷۱/۶۲ است.

۴) یکی از محدودیتهای آن مازاد است و فضای جواب آن نامتناهی است.

[آزاد، بازرگانی، ۸۱]

گزینه ۳

مدل را رسم می کنیم:



(ادامه در فیش بعد)

منطقه موجه نامحدود است، اما چون تابع هدف از Min سازی دو جمله با علامت مثبت تشکیل شده، جواب بهینه محدود است (رسم آن همانند شکل بالاست) مختصات نقطه ی b و c را بدست می آوریم و در تابع هدف قرار می دهیم:

$$b \rightarrow \begin{cases} ۵x_۱ + x_۲ = ۱۰۰ \\ ۳x_۱ + ۲x_۲ = ۱۲۰ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -۱۰x_۱ - ۲x_۲ = -۲۰۰ \\ ۳x_۱ + ۲x_۲ = ۱۲۰ \end{cases} \rightarrow -۷x_۱ = -۸۰ \rightarrow \begin{cases} x_۱ = \frac{۸۰}{۷} \\ x_۲ = \frac{۳۰۰}{۷} \end{cases}$$

$$Z_{\mathrm{b}} = ۹۵/۱۴$$

$$C \rightarrow \begin{cases} x_۱ = \frac{۱۸۰}{۷} \\ x_۲ = \frac{۱۵۰}{۷} \end{cases}, Z_c = ۷۱/۵۷$$

جواب کنکوری:

در جلسه ی آزمون بهتر است با رسم تابع هدف و جهت حرکت آن و همچنین حذف گزینه های اشتباه به جواب برسید. با رسم منطقه موجه در می یابیم که گزینه ۱ و ۴ اشتباهند (محدودیت مازاد یعنی محدودیتی که در منطقه موجه تأثیری ندارد). با توجه به تابع هدف گزینه ۲ هم اشتباه است. پس گزینه ۳ صحیح می باشد.

حالت جواب بهینه چندگانه چه زمانی رخ می دهد؟

۱ ص ۴۷

هنگامی که تابع هدف موازی یکی از محدودیت های دربرگیرنده ی جواب بهینه باشد.

تعداد جواب های بهینه یک مسأله برنامه ریزی خطی می تواند .....، ..... یا ..... باشد.

یکی – بی نهایت – بدون جواب بهینه

وقتی تابع هدف با محدودیتی موازی باشد ..... مسأله دارای حالت خاص ..... باشد.

ممکن است – بهینه چندگانه

چرا «ممکن است»؟ چون اگر معادله حدی آن محدودیت، دربردارنده جواب بهینه باشد. در اینصورت با حالت خاص بهینه چندگانه مواجهیم. شاید در مدل محدودیتی باشد که موازی تابع هدف باشد، اما تابع هدف به سمت آن حرکت نکند (دربردارنده جواب نباشد)، در اینصورت با بهینه چندگانه مواجه نیستیم.

حالت خاص مدل زیر چیست؟ جواب را تعیین کنید؟

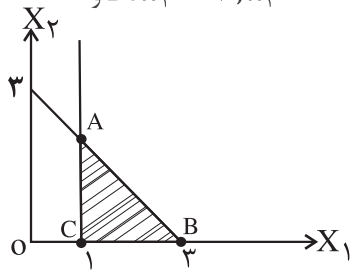
$$Maxz = ۴x_۱ + ۴x_۲$$
$$\begin{cases} x_۱ + x_۲ \leq ۳ \\ x_۱ \geq ۱ \end{cases}$$
$$x_۱ \text{ و } x_۲ \geq ۰$$

۲ ص ۲۰

تابع هدف موازی محدودیت اول است و تمامی نقاط روی پاره خط AB مقدار بهینه ۱۲ را برای تابع هدف ارائه می دهد.

با توجه به این که تابع هدف با محدودیت اول موازی است و به همان سمت هم حرکت می کند، با حالت خاص بهینه چندگانه مواجهیم. با توجه به این که جواب بهینه در نقطه گوشه ای قرار دارد، داریم:

$A: x_۱^* = ۱ , x_۲^* = ۲ \rightarrow z^* = ۱۲$ و $B: x_۱^* = ۳ , x_۲^* = ۰ \rightarrow z^* = ۱۲$



در حالت جواب بهینه چندگانه، تعداد جواب های بهینه ..... است که هر جواب مقدار z بهینه ..... را ارائه می نماید.

۱ ص ۴۷

بی نهایت – یکسانی

* توجـه داشته باشید که در این حالت، همه ی نقـــاط موجه محدودیت موازی تابـع هدف (هم نقاط گوشه ای و هم سایر نقاط روی معادله حدی) مقدار بهینه و یکسانی را برای تابع هدف ارائه می دهند، اما با توجه به اینکه گفتیم جـواب بهینه حتمـاً در نقاط گوشه ای قرار دارد، فقـط جواب مربوط به دو نقطه ی دو سر خط که در منطقه موجه قرار دارد مورد قبول می باشد.

در حالت بهینه ی چندگانه، ..... جواب غیرپایه ای وجود دارد.

(منظور از جواب پایه ای، جواب مربوط به نقاط گوشه موجه می باشد)

بی نهایت

تعداد نقاط گوشه ی بهینه در حالت خاص بهینه چندگانه ..... ولی تعداد نقاط بهینه غیرگوشه ..... است.

محدود – بی نهایت

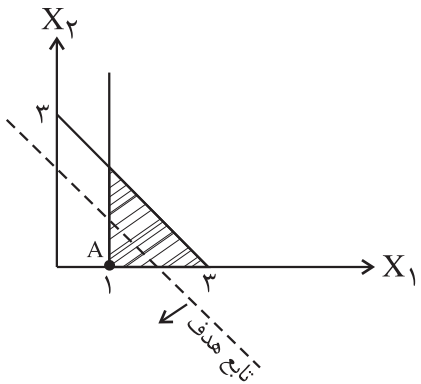
حالت خاص مدل زیر چیست؟ جواب را تعیین کنید؟

$$Minz = ۴x_۱ + ۴x_۲$$
$$\begin{cases} x_۱ + x_۲ \leq ۳ \\ x_۱ \geq ۱ \end{cases}$$
$$x_۱ \text{ و } x_۲ \geq ۰$$

۲ ص ۲۰

اگر چه تابع هدف با محدودیت اول موازی است اما با توجه به این که جواب بهینه روی معادله ی این محدودیت قرار ندارد، با هیچ حالت خاصی مواجه نیستیم.

$$A: x_۱^* = ۱ \quad , x_۲^* = ۰ \rightarrow z^* = ۴$$



در مدل روبرو، با تغییر تابع هدف از Max به Min چه اتفاقی می افتد؟ مدل چه حالت خاصی دارد؟

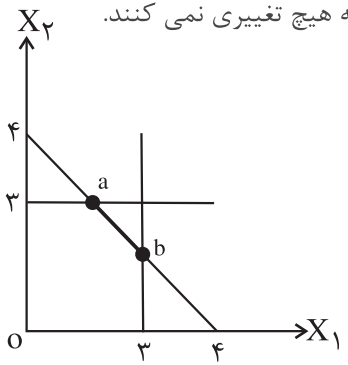
$$Max z = x_۱ + x_۲$$

$$\begin{cases} x_۱ + x_۲ \leq ۴ \\ x_۱ \leq ۳ \\ x_۲ \leq ۳ \end{cases}$$

$x_۱$ و $x_۲ \geq ۰$

منطقه موجه، پاره خط ab است و مسأله دارای حالت خاص بهینه ی چندگانه است.

جواب های گوشه ای به ازای (۳ و ۱)a و (۱و۳)b برابر با $z^* = ۴$ است. با Min شدن تابع هدف، منطقه ی موجه و جواب بهینه هیچ تغییری نمی کنند.



در صورتی که مسأله فقط یک جواب بهینه داشته باشد، این جواب بهینه حتماً در یکی از ..... است.

- ☐
- ☐
- ☐
- ☐
- ☐ ۳ ص ۶۰

گوشه های موجه

در صورتی که مسأله دارای جواب بهینه چندگانه باشد حتماً حداقل دو تا از آنها در ..... هستند.

۳ ص ۶۰

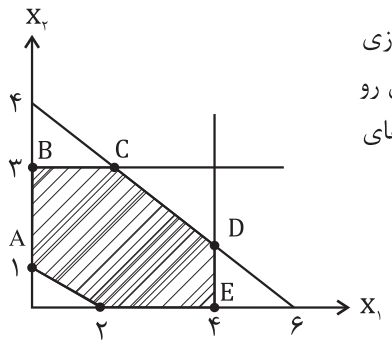
گوشه های موجه مجاور

مدل زیر را رسم کرده و جواب بهینه آن را بیابید؟

$$Maxz = ۴x_۱ + ۶x_۲$$

$$\begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ \geq ۲ \\ x_۱ \leq ۴ \\ x_۲ \leq ۳ \\ ۲x_۱ + ۳x_۲ \leq ۱۲ \end{cases}$$

$$x_۱ \text{ و } x_۲ \geq ۰$$



منطقه ABCDE منطقه موجـــه است. تابـع هدف مـــوازی پاره خط CD است و به سمت آن حرکت می کند. از این رو با حالت خاص جواب بهینه چندگانه مواجهیم. جـــواب های بهینه عبارتند از:

$$C^*(\frac{۳}{۲}, ۳), Z^*=۲۴$$

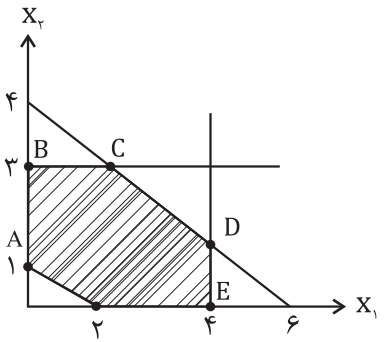
$$D^*(۴, \frac{۴}{۳}), Z^*=۲۴$$

مدل زیر را رسم کرده و جواب بهینه آن را بیابید؟

$$\text{Min}\, z = ۴x_۱ + ۶x_۲$$

$$\begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ \geq ۲ \\ x_۱ \leq ۴ \\ x_۲ \leq ۳ \\ ۲x_۱ + ۳x_۲ \leq ۱۲ \end{cases}$$

$$x_۱ \text{ و } x_۲ \geq ۰$$



تابع هدف Min است و به سمت محدودیت چهارم حرکت نمی کند، از این رو موازی بودن آنها منجر به حالت خاص بهینه چندگانه نمی شود و داریم:

$$A^*(۰ , ۱) , Z^*=۴$$

حالت تبهگن یا دژنره (Degenerate) چه زمانی پیش می آید؟

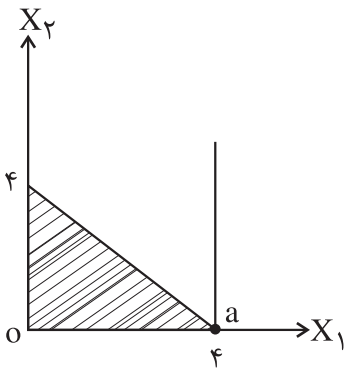
* تبهگن = تباهیده = دژنره

۱ ص ۴۸

در یک مسأله دو متغیره، هرگاه یک نقطه ی گوشه، از محل تقاطع بیش از دو معادله حدی به وجود آمده باشد، مسأله تبهگن است.

مدل زیر دارای چه حالت خاصی می باشد؟

$$Max z = ۲x_۱ + x_۲$$
$$\begin{cases} x_۱ + x_۲ \leq ۴ \\ ۲x_۱ \leq ۸ \end{cases}$$
$$x_۱ \text{ و } x_۲ \geq ۰$$



نقطه ی a محل عبور بیش از دو معادله است:

۱- محور x_1

۲- محدودیت اول

۳- محدودیت دوم

پس حالت تبهگن وجود دارد

در یک مسأله تولیدی (به طور مثال)، از نظر مقدار منابع باقی مانده، چه زمانی حالت تبهگن رخ می‌دهد؟ (مفهوم تبهگنی در واقعیت)

۱۴ ص ۸۵

زمانی که به ازای میزانی تولید از محصولی خاص، دو یا چند منبع به طور هم زمان به صفر برسند.

حالت تبهگن ممکن است ..... یا ..... باشد.

۲ ص ۲۰

تبهگن دائم –تبهگن موقت

در حالت ترسیمی، تبهگن دائم چه زمانی رخ می دهد؟

۲ ص ۲۰

در تبهگن دائم، نقطه ی تباهیده، جواب بهینه مسأله نیز هست.

در حالت ترسیمی، تبهگن موقت چه زمانی رخ می دهد؟

۲ ص ۲۰

زمانی که یکی از نقاط گوشه ی موجه، محل عبور بیش از دو خط است، اما آن نقطه گوشه دربردارنده جواب بهینه نیست.

جواب بهینه مدل زیر چند است؟ چه حالت خاصی دارد؟

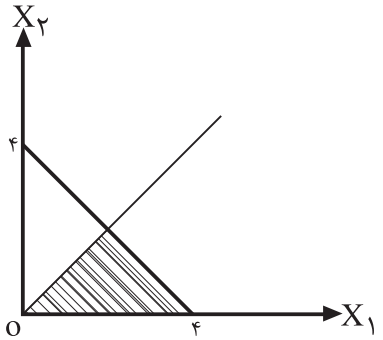
$$Minz = ۳x_۱$$

$$\begin{cases} x_۱ - \frac{۱}{۲}x_۲ \geq ۰ \\ x_۱ + x_۲ \leq ۴ \end{cases}$$

$$x_۱ \text{ و } x_۲ \geq ۰$$

$$o(۰,۰) \rightarrow z_۰^* = ۰$$

نقطه ی o نقطه ی تباهیده است چون محور $x_۱$ و $x_۲$ و محدودیت اول از آن عبور کرده اند. چون همین نقطه، جواب بهینه نیز هست با حالت تبهگن (دائم) مواجهیم.



جواب بهینه مدل زیر چند است؟ چه حالت خاصی دارد؟

$$Max z = ۳x_۱$$

$$\begin{cases} x_۱ - \frac{۱}{۲}x_۲ \geq ۰ \\ x_۱ + x_۲ \leq ۴ \end{cases}$$

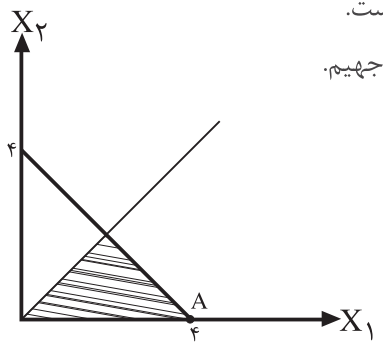
$$x_۱ \text{ و } x_۲ \geq ۰$$

$$A(۴,۰) \rightarrow z_A^* = ۱۲$$

نقطه ی O نقطه ی تباهیده است چون محور $x_۱$ و $x_۲$ و محدودیت اول از آن عبور کرده اند.

نقطه ی A بیانگر جواب بهینه است.

پس با حالت تبهگن (موقت) مواجهیم.



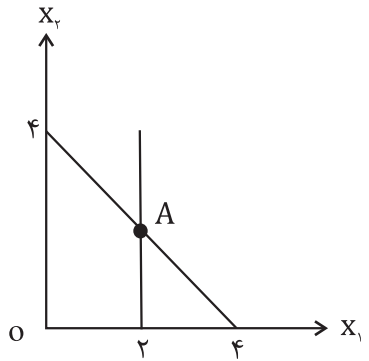
هرگاه منطقه ی موجه یک نقطه باشد، آیا مسأله لزوماً تبهگن است؟

خیر، ممکن است مدل دارای دو محدودیت با علامت مساوی باشد. مثال:

$$Maxz = x_۱$$

$$\begin{cases} x_۱ = ۲ \\ x_۱ + x_۲ = ۴ \end{cases}$$

$$x_۱ \text{ و } x_۲ \geq ۰$$



نقطه بهینه A(۲ , ۲) با Z*=۲ است (منطقه موجه نیز فقط همین نقطه است) و هیچ حالت خاصی هم وجود ندارد.

هرگاه عدد سمت راست محدودیتی صفر باشد، مسأله دارای حالت خاص ..... است.

تبهگن

(چرا؟ چون در اینصورت حتماً یک معادله حدی از مبدأ مختصات عبور می کند)

هنگامی که اعداد سمت راست در محدودیت های یک مسأله برنامه ریزی خطی، مضربی از ضرائب یک متغیر تصمیم هستند، این مسأله دارای حالت خاص ..... است.

حالت خاص تبهگن

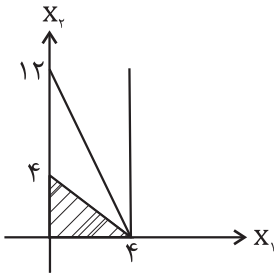
به مثال مقابل توجه کنید:

(توجه کنید که اعداد سمت راست، در ۳ محدودیت **حاصلضرب** ضریب ۴ متغیر $x_۱$ در هر سه محدودیت هستند)

$$Max z = ۲x_۱ + ۳x_۲$$

$$\begin{cases} ۲x_۱ + ۲x_۲ \leq ۸ \\ ۳x_۱ + x_۲ \leq ۱۲ \\ x_۱ \leq ۴ \end{cases}$$

$$x_۱ \text{ و } x_۲ \geq ۰$$



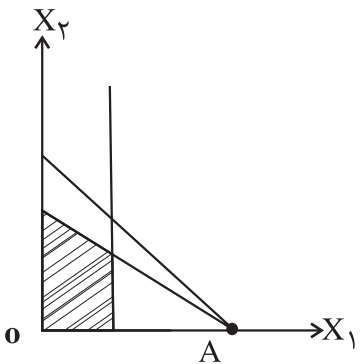
اگر نقطه ای در خارج از منطقه موجه، محل عبور بیش از دو محدودیت باشد، با حالت خاص تبهگن مواجه ..... .

۱۴ ص ۸۵

نیستیم

حالت تبهگن زمانی رخ می دهد که نقطه ای که جزء منطقه موجه محسوب می شود، محل عبور بیش از دو معادله حدی باشد.

آیا در مدل ترسیمی زیر، با حالت خاص تبهگن مواجه هستیم؟



خیر

اگر چه نقطه A محل عبور بیش از دو معادله است اما چون در خارج از منطقه موجه قرار دارد با حالت خاص تبهگن مواجه نیستیم.

با توجه به حل ترسیمی از برنامه زیر، وضعیت نهایی چگونه است؟

$$Max\ z = x_۱ + x_۲$$
$$s.t.$$
$$x_۱ + x_۲ \leq ۳$$
$$۲x_۱ - x_۲ \leq ۳$$
$$x_۱ \geq ۱۴$$
$$x_۱, x_۲ \geq ۰$$

۱) بهینه چندگانه

۲) عدم وجود جواب شدنی

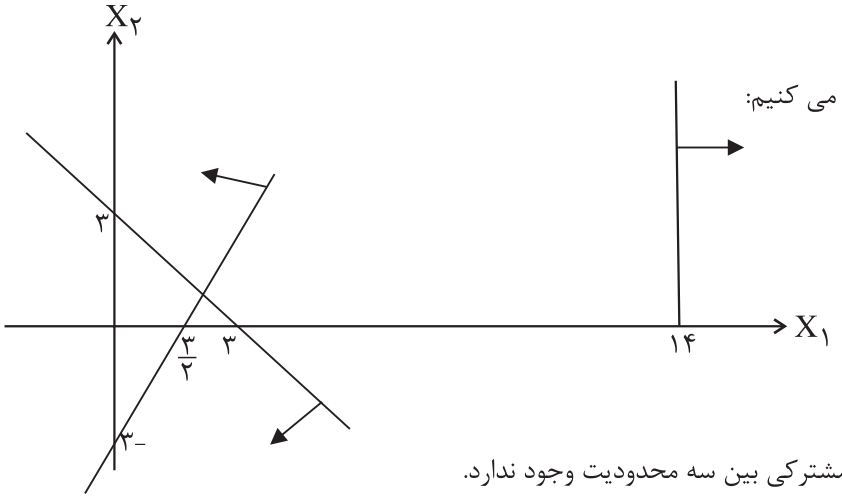
۳) بهینه منحصر به فرد

۴) جواب بهین نامحدود

[آزاد، بازرگانی، ۸۸]

گزینه ۲

مدل را رسم می کنیم:



هیچ فضای مشترکی بین سه محدودیت وجود ندارد.

اگر در یک مسأله برنامه ریزی خطی تابع هدف موازی یکی از قیود باشد، آنگاه:

۱) جواب بهین دگرین داریم.

۲) هیچ نتیجه ای نمی توان گرفت.

۳) جواب بهین منحصر به فرد داریم.

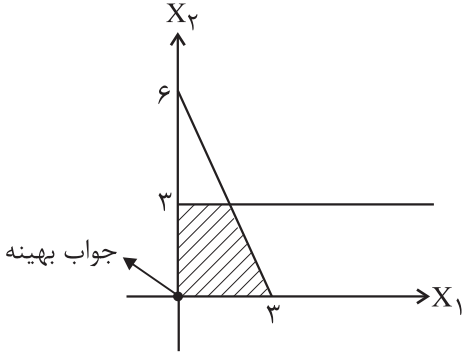
۴) جواب بهین تبگهن داریم.

[آزاد، صنعتی، ۸۸]

گزینه ۲

فقط می توان گفت که **ممکن است** جواب بهینه چندگانه (دگرین) داشته باشیم. مثلاً در مدل زیر، با اینکه تابع هدف موازی محدودیت اول است، اما جواب بهینه چندگانه نیست و منحصر به فرد است:

$$Min\ z = ۲x_۱ + x_۲$$
$$\begin{cases} ۲x_۱ + x_۲ \leq ۶ \\ x_۲ \leq ۳ \end{cases}$$
$$x_۱, x_۲ \geq ۰$$



مدل زیر مفروض است:

$$Max\ z = ۴x_۱ + ۵x_۲$$
$$۲x_۱ - x_۲ \leq ۴$$
$$x_۱ - ۲x_۲ \leq ۶$$
$$x_۱, x_۲ \geq ۰$$

مدل دارای حالت:

۱) جواب بهینه چندگانه است.

۲) جواب بهینه نامحدود است.

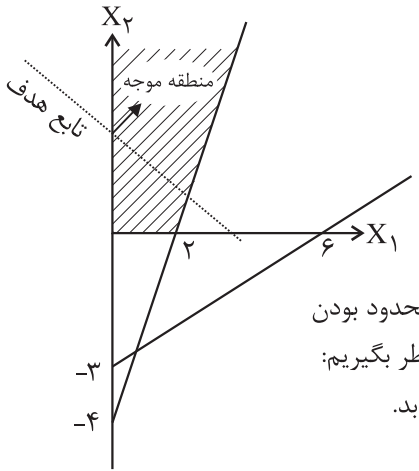
۳) تبهگن است.

۴) دارای جواب بهینه محدود است.

[سراسری، مدیریت، ۷۸]

گزینه ۲

منطقه موجه را رسم می کنیم:

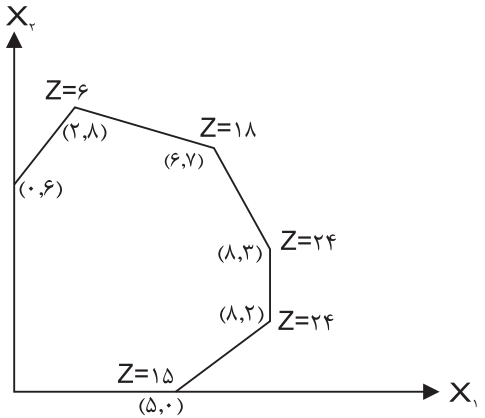


منطقه موجه نامحدود است، اما جهت تعیین محدود یا نامحدود بودن جواب بهینه باید تابع هدف و جهت حرکت آن را هم در نظر بگیریم:

حرکت تابع هدف به سمتی است که همچنان ادامه می یابد.

از اینرو جواب بهینه هم نامحدود است.

تابع هدف مسأله زیر کدام است؟



۱) $MaxZ = ۳x_۱$

۲) $MaxZ = ۶x_۱$

۳) $MaxZ = ۴x_۲$

۴) $MaxZ = ۴x_۱$

[سراسری، مدیریت، ۸۰]

گزینه ۱

با توجه به اینکه مقدار Z در دو نقطه بهینه است و این دو نقطه دارای مختصات (۴ و ۸) و (۲و ۸) هستند، از این رو تابع هدف باید یک خط عمودی باشد. ($Max\ z = ax_۱$)، چون به ازای هر دو آن نقاط $Z^* = ۲۴$ است باید:

$$a(۸) = ۲۴ \rightarrow a = ۳ \Longrightarrow Max\ z = ۳x_۱$$

اعداد سمت راست در محدودیت های یک مسأله برنامه ریزی خطی مضربی از ضرائب یک متغیر تصمیم هستند. این مسأله دارای ..... است.

۱) بدون جواب بهینه

۲) جواب تبهگن (تباهیده)

۳) جواب بهینه چندگانه

۴) مقدار جواب بهینه نامحدود

[سراسری، مدیریت، ۸۰]

گزینه ۲

یکی از نشانه های حالت تبهگن آنست که اعداد سمت راست در محدودیتها مضربی از ضرایب یک متغیر تصمیم هستند.

یک مسأله برنامه ریزی خطی دو متغیره با دو محدودیت و با تابع هدف Max مفروض است. در صورتی که تابع هدف به Min تبدیل شود و جواب بهینه بدون تغییر باقی بماند، منطقه موجه مسأله ..... است.

۱) یک نقطه

۲) دو نقطه

۳) نامحدود

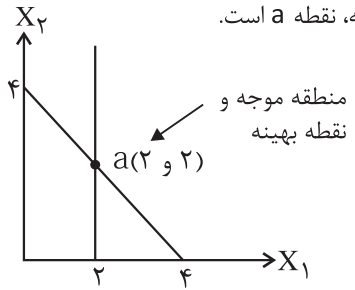
۴) یک سطح

[سراسری، مدیریت، ۸۱]

گزینه ۱

به شکل ۱ دقت کنید که یک مثال از این حالت است و به ازاء هر دو تابع هدف $Max\ z = ۲x_۱ + x_۲$ و $Min\ z = ۲x_۱ + x_۲$، جواب بهینه، نقطه a است.

$$Max\ z = ۲x_۱ + x_۲$$
$$\begin{cases} x_۱ + x_۲ = ۴ \\ x_۱ = ۲ \end{cases}$$
$$x_۱ و\ x_۲ \geq ۰$$

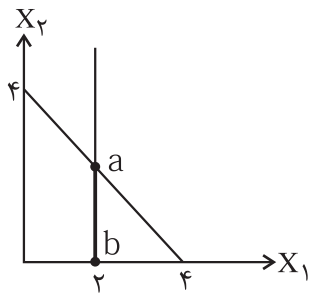


* توجه داشته باشید که در صورتی که با حالت خاص جواب بهینه چندگانه مواجه باشیم و منطقه موجه نیز یک خط باشد، در این حالت نیز با تغییر تابع هدف از Max به Min یا بالعکس، باز هم جواب بهینه تغییری نمی کند.

(ادامه در فیش بعد)

مانند مثال زیر:

$$Max\ z = ۲x_۱$$
$$\begin{cases} x_۱ + x_۲ \leq ۴ \\ x_۱ = ۲ \end{cases}$$
$$x_۱ و\ x_۲ \geq ۰$$



جواب بهینه در هر دو حالت تابع هدف، روی پاره خط ab قرار دارد.

پاسخ مسأله برنامه ریزی خطی زیر چگونه است؟

$$Maxz = ۱۲y_۱ + ۸y_۲$$

$$st: \begin{cases} ۳y_۱ + y_۲ \leq ۱۶ \\ ۲y_۱ \leq -۳ \end{cases}$$

$$y_j \geq ۰$$

۱) بهینه چندگانه ۲) تبهگن موقت

۳) تبهگن دائم ۴) نشدنی

[آزاد، بازرگانی،۸۳]

محدودیت دوم با شرط $y_j \geq 0$ همخوانی ندارد، از این رو مدل منطقه ی موجه ندارد (نشدنی است)

- متغیر تصمیم با نماد y_j نشان داده شده اند که تفاوتی در حل ایجاد نمی کند.

مسأله برنامه ریزی خطی را در نظر بگیرید، در صورتی که کلیه $C_J > ۰$ ها باشند، کدام گزینه در مورد جواب بهینه صحیح است؟

$$Min \sum_{j=۱}^{n} C_J X_J$$
$$st: \sum_{j=۱}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad , i = ۱, \dots, m$$
$$x_j \geq ۰$$

۱) در جواب بهینه همه xj ها مساوی صفر هستند.

۲) جواب بهینه محدودیت ندارد.

۳) مسأله جواب بهینه ندارد.

۴) جواب بهینه بستگی به مقدار سمت راست و ضرایب متغیرها در محدودیت ها دارد.

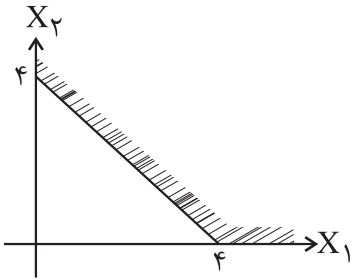
[سراسری، مدیریت، ۸۶]

گزینه ۴

اگر $a_{ij} \geq ۰$ ها و $b_i \geq ۰$ باشند، با توجه به *min* بودن تابع هدف و علامت محدودیت ها، منطقه ی موجه حتماً نقطه ی (۰ و ۰) را نیز در بر می گیرد و جواب نیز همین نقطه خواهد بود.

با توجه به این که اطلاعی در مورد a_{ij} ها و b_i ها نداریم، ممکن است منطقه ی موجه، نقطه ی مبدأ را در بر نگیرد و از این رو نمی توان در مورد جواب نظری داد، به عنوان مثال محدودیت زیر را در نظر بگیرید.

$$-x_۱ - x_۲ \leq -۴$$



در مدل برنامه ریـزی خطـی زیـر، تـابع هـدف بـا محـدودیت اول مـوازی اسـت. بـا توجـه بـه حـل ترسیمی، جواب این مسأله ..... است.

$$min\ \ z = x_1 + 2x_2$$

$$st: \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \geq 8 \\ x_1 - x_2 \leq 4 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

۱) تبهگن

۲) بهینه نامحدود

۳) بهینه چندگانه

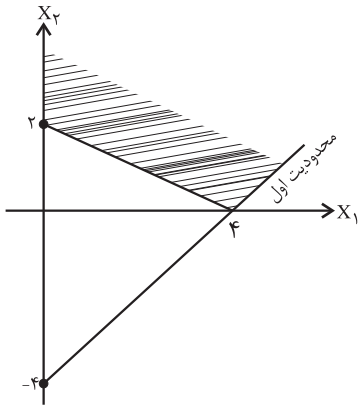
۴) تبهگن و بهینه چندگانه

[سراسری، مدیریت، ۸۱]

گزینه ۴

تابع هدف با محدودیت اول موازی است و جهت حرکت آن نیز به سمت همان محدودیت است، پس با حالت خاص جواب بهینه چندگانه مواجهیم.

از طرفی در نقطه ی (۰ و ۴) بیش از دو معادله عبور کرده اند (که عبارتند از محور X_1 و محدودیت اول و دوم) پس حالت خاص تبهگن هم وجود دارد



مسأله زیر را در نظر بگیرید. برای چه مقدار از A، مسأله دارای جواب بهینه چندگانه است؟

$$Maxz = ۲x_۱ - Ax_۲$$

$$st: \begin{cases} x_۱ - ۲x_۲ \leq ۲ \\ -۲x_۱ + x_۲ \leq ۱ \end{cases}$$

$$x_۱, x_۲ \geq ۰$$

۱) $A=۴$

۲) $A=۱$

۳) $A=۰$

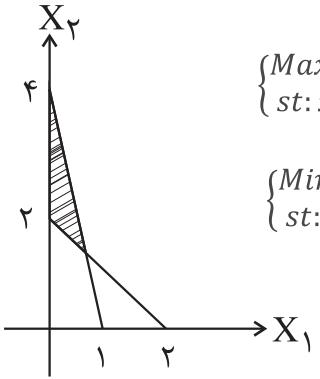
۴) $A=-۴$

[آزاد، صنعتی، ۸۸]

گزینه ۱

با توجه به حالت ترسیمی و جهت حرکت تابع هدف، در صورتی که تابع هدف موازی محدودیت اول باشد، با حالت خاص جواب بهینه چندگانه مواجهیم، در نتیجه اگر $A=۴$ باشد جواب بهینه چندگانه وجود خواهد داشت.

در مسأله برنامه ریزی خطی روبرو، کدام تابع هدف و محدودیت جدید سبب می شود مسأله دارای یکی از حالت های خاص برنامه ریزی خطی شود؟



۱) $\begin{cases} Minz = x_1 - x_2 \\ st: x_1 + 2x_2 \leq 4 \end{cases}$

۲) $\begin{cases} Maxz = x_1 + 2x_2 \\ st: x_1 + 2x_2 \geq 4 \end{cases}$

۳) $\begin{cases} Maxz = x_1 + 2x_2 \\ st: x_1 + x_2 \leq 4 \end{cases}$

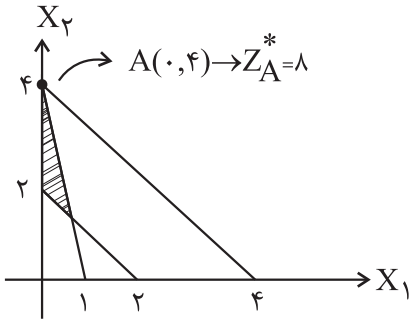
۴) $\begin{cases} Minz = x_1 + 2x_2 \\ st: x_1 + 2x_2 \leq 4 \end{cases}$

[سراسری، مدیریت، ۸۸]

گزینه ۳

اضافه شدن این تابع هدف و محدودیت به منطقه ی موجه باعث می شود که با حالت تبهگن دائم مواجه شویم. در گزینه های دیگر تبهگن موقت وجود دارد. دقت کنید که صرفاً موازی بودن یک محدودیت با تابع هدف به معنی حالت خاص بهینه ی چندگانه نیست و این موضوع به جهت حرکت تابع هدف هم بستگی دارد.

با توجه به گزینه سوم داریم:



نوع ناحیه شدنی ناشی از محدودیت های زیر کدامست؟

$$\begin{cases} x - y \leq ۱ \\ x - y \geq ۲ \end{cases}$$

۱) یک ناحیه تهی

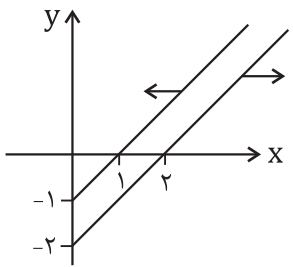
۲) یک مثلث

۳) یک مستطیل

۴) یک ناحیه نامحدود

[آزاد، صنعتی، ۸۶]

گزینه ۱

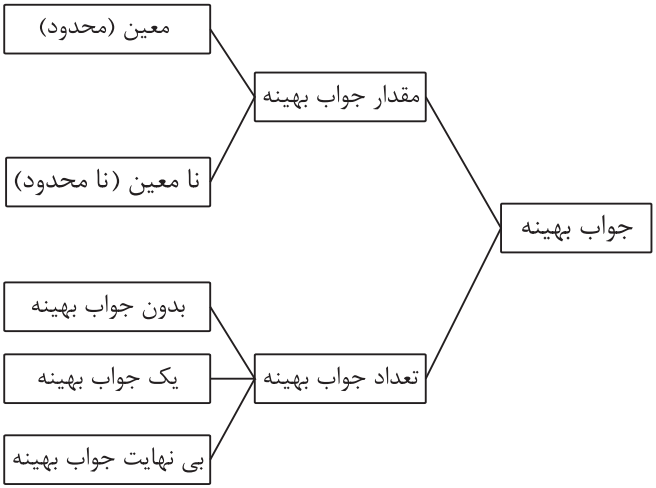


$$\begin{cases} x - y \leq ۱ \\ x - y \geq ۲ \end{cases}$$

یک ناحیه تهی است (بدون منطقه موجه)

$x_۲$ و $x_۱$ را به شکل y و x هم می توان نشان داد.

حالت های مختلف جواب بهینه را از نظر "مقدار جواب بهینه" و "تعداد جواب بهینه" نام ببرید؟


جواب بهینه
مقدار جواب بهینه
معین (محدود)
نا معین (نا محدود)
تعداد جواب بهینه
بدون جواب بهینه
یک جواب بهینه
بی نهایت جواب بهینه

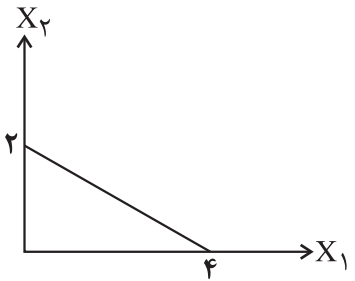
هنگامی که یک محدودیت رسم شده داریم و معادله (یا نامعادله) مربوط به آن را نمی دانیم. برای نوشتن معادله ی حدی آن چه می کنیم؟

توجه: در این فلش کارت نوشتن معادله حدی محدودیت رسم شده را توضیح داده و در ادامه، تعیین علامت مربوط به محدودیت نیز توضیح داده می شود.

۱۴ ص ۸۲

برای تعیین محدودیت، محل برخورد را با محورهای مختصات مشخص نموده، مقدار x_2 را ضریب x_1 و مقدار x_1 را ضریب x_2 قرار می دهیم (بدون این که علامت ها دخالت داده شوند)، سپس این دو ضریب را در همدیگر ضرب نموده و به عنوان عدد سمت راست محدودیت در نظر می گیریم. در مرحله بعدی برای تعیین علامت x_1 و x_2، بسته به این که محدودیت مربوطه، محورهای x_1 و x_2 را در سمت مثبت قطع نموده باشد علامت (+) و اگر محورها را در سمت منفی قطع کرده باشد علامت (-) تعلق می گیرد.

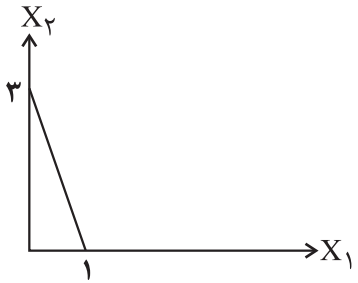
معادله ی حدی مربوط به محدودیت زیر را بنویسید؟



مقدار روی محور x_2 را به عنوان ضریب x_1 و مقدار روی محور x_1 را به عنوان ضریب x_2 در محدودیت مربوطه در نظر می گیریم، چون هر دو عدد در سمت مثبت محور ها قرار دارند، در معادله محدودیت نیز علامت مثبت خواهند داشت. عدد سمت راست هم از ضرب کردن ضرایب متغیرهای x_1 و x_2 به دست می آید.

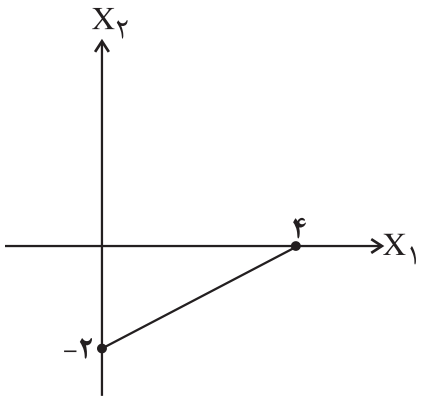
$$۲x_۱ + ۴x_۲ = ۸$$

معادله حدی مربوط به محدودیت زیر را بنویسید؟



$$۳x_۱ + x_۲ = ۳$$

معادله حدی مربوط به محدودیت زیر را بنویسید؟



مقدار روی محور x_2 را به عنوان ضریب x_1 و مقدار روی محور x_1 را به عنوان ضریب x_2 در نظر می گیریم (صرف نظر از علامت)، پس تا اینجا داریم: $2x_1 + 4x_2$

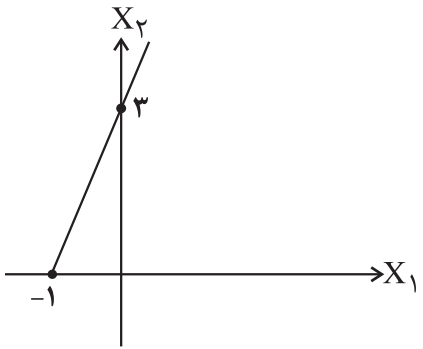
چون خط مربوط به محدودیت، محور x_1 را در سمت مثبت قطع کرده است، علامت x_1 مثبت، و چون خط مربوط به **محدودیت** ، محور x_2 را در سمت منفی قطع کرده است، علامت x_2 منفی می شود.

یعنی : $2x_1 - 4x_2$

عدد سمت راست نیز از ضرب ضرایب دو متغیر (صرف نظر از علامت) به دست می آید:

$$2x_1 - 4x_2 = 8$$

معادله حدی مربوط به محدودیت زیر را بنویسید؟



$$-۳x_۱ + x_۲ = ۳$$

هنگامی که یک محدودیت رسم شده داریم و معادله حدی مربوط به آن را نیز نوشته ایم، برای تعیین جهت علامت محدودیت ($\leq$ ، = ، $\geq$) چگونه عمل می کنیم؟

۱۴ ص ۸۲

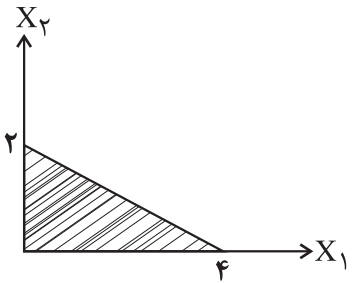
برای محدودیت رسم شده:

اگر منطقه موجه و مبدأ در یک طرف محدودیت قرار داشته باشند، محدودیت علامت $\leq$ دارد

اگر منطقه موجه و مبدأ دو طرف محدودیت قرار داشته باشند، محدودیت علامت $\geq$ دارد

اگر منطقه موجه بر روی خط محدودیت باشد، علامت = خواهد داشت

عبارت مربوط به محدودیت زیر را بنویسید؟



ابتدا معادله حدی را می نویسیم:

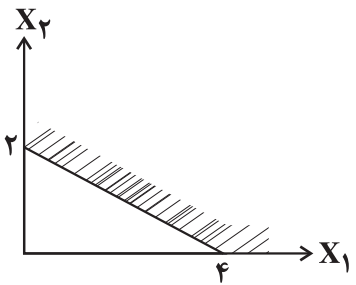
$$۲x_۱ + ۴x_۲ = ۸$$

سپس علامت محدودیت را تعیین می کنیم:

چون مبدأ مختصات و منطقه موجه مربوط به محدودیت، هر دو در یک سمت هستند، علامت محدودیت $\leq$ است، پس داریم:

$$۲x_۱ + ۴x_۲ \leq ۸$$

عبارت مربوط به محدودیت زیر را بنویسید؟



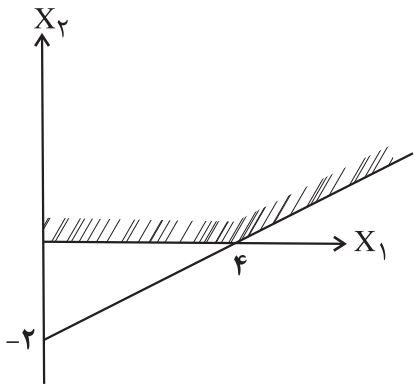
معادله حدی را می نویسیم : $۲x_۱ + ۴x_۲ = ۸$

سپس علامت محدودیت را تعیین می کنیم:

چون مبدأ مختصات و منطقه موجه مربوط به محدودیت، در دو سمت مختلف خط هستند، علامت محدودیت $\geq$ است، پس داریم:

$$۲x_۱ + ۴x_۲ \geq ۸$$

عبارت مربوط به محدودیت زیر را بنویسید؟



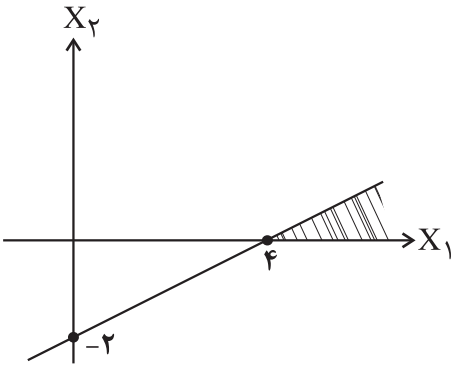
ابتدا معادله حدی را می نویسیم:

$$۲x_۱ - ۴x_۲ = ۸$$

چون منطقه موجه و مبدأ مختصات در یک سمت قرار دارند علامت محدودیت $\leq$ است:

$$۲x_۱ - ۴x_۲ \leq ۸$$

عبارت مربوط به محدودیت زیر را بنویسید؟



ابتدا معادله حدی را می نویسیم:

$$۲x_۱ - ۴x_۲ = ۸$$

چون منطقه موجه و مبدأ مختصات در دو سمت مختلف خط مربوط به محدودیت قرار دارند، علامت محدودیت $\geq$ است:

$$۲x_۱ - ۴x_۲ \geq ۸$$

در محدودیت هایی که از مبدأ مختصات می گذرند قالب کلی محدودیت چگونه است؟

۱۴ ص ۸۲

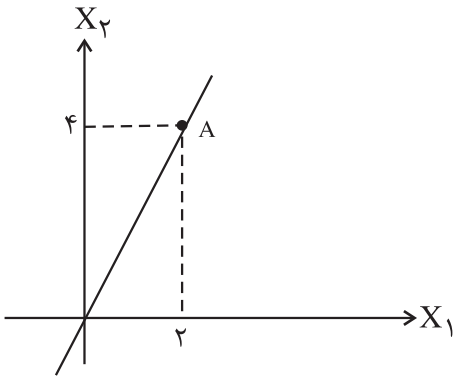
$$ax_1 - bx_2 \begin{matrix} \leq \\ = \\ \geq \end{matrix} 0$$

در محدودیت هایی که از مبدأ مختصات می گذرند، معادله حدی محدودیت چگونه نوشته می شود؟

۱۴ ص ۸۲

ابتدا قالب کلی را برای این نوع محدودیت ها در نظر می گیریم ($ax_1 - bx_2 \begin{matrix} \leq \\ = \\ \geq \end{matrix} 0$)، سپس یک نقطه (غیرصفر) در ربع اول بر روی خط محدودیت در نظر می گیریم، برای نقطه ی مذکور x_2 و x_1 را تعیین می کنیم، مقدار x_2 نقطه مذکور، ضریب متغیر x_1 در محدودیت و مقدار x_1 آن، ضریب متغیر x_2 در محدودیت خواهد بود.

معادله حدی مربوط به محدودیت زیر را بنویسید؟



قالب کلی: $ax_1 - bx_2 = 0$

نقطه A(۲ , ۴) را در نظر می گیریم.

عدد x_2 نقطه A، ضریب x_1 و عدد x_1 نقطه A، ضریب x_2 در محدودیت است:

$$4x_1 - 2x_2$$

(عدد سمت راست نیز صفر است)

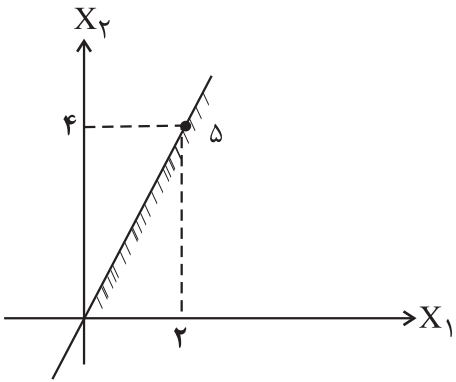
پس داریم: $4x_1 - 2x_2 = 0$

هنگامی که برای محدودیتی که از نقطه مبدأ عبور کرده است، معادله ی مربوطه را نوشتیم، برای تعیین علامت محدودیت چه می کنیم؟

۱۴ ص ۸۲

یک نقطه در منطقه موجه محدودیت در نظر می گیریم (اگر این نقطه در روی محورهای مختصات در نظر گرفته شود کار ساده تر است) و بر حسب رابطه مقدار حاصله با صفر، علامت مناسب را قرار می دهیم.

عبارت محدودیت زیر را بنویسید؟



ابتدا معادله حدی را می نویسیم :

$$۴x_۱ - ۲x_۲ = ۰$$

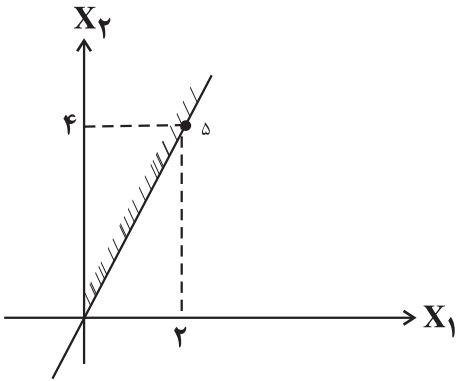
برای تعیین علامت محدودیت، نقطه ای مانند (۰ و ۲) که در منطقه موجه محدودیت قرار دارد را در معادله فوق قرار می دهیم:

$$۴(۲) - ۲(۰) = ۸$$

چون ۸ از صفر بزرگتر است:

$$۴x_۱ - ۲x_۲ \geq ۰$$

عبارت محدودیت زیر را بنویسید؟



معادله حدی : $۴x_۱ - ۲x_۲ = ۰$

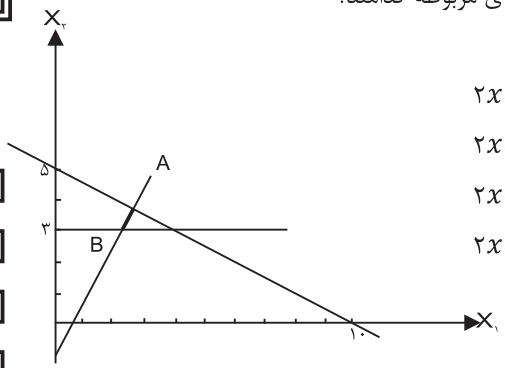
نقطه ی (۴ و ۰) را در نظر می گیریم (یا هر نقطه ای دیگر در منطقه موجه محدودیت) و آن را در معادله محدودیت قرار می دهیم :

$$۴(۰) - ۲(۴) = -۸$$

چون ۸- کوچکتر از صفر است:

$$۴x_۱ - ۲x_۲ \leq ۰$$

منطقه موجه شکل زیر خط AB است. محدودیت های مربوطه کدامند؟



۱) $۲x_۱ - x_۲ = ۱\ ,\ x_۱ + ۲x_۲ \leq ۱۰\ ,\ x_۲ \geq ۳$

۲) $۲x_۱ - x_۲ \leq ۱\ ,\ x_۱ + ۲x_۲ = ۱۰\ ,\ x_۲ \leq ۳$

۳) $۲x_۱ - x_۲ = ۱\ ,\ x_۱ + ۲x_۲ \geq ۱۰\ ,\ x_۲ \geq ۳$

۴) $۲x_۱ - x_۲ = ۱\ ,\ x_۱ + ۲x_۲ = ۱۰\ ,\ x_۲ \geq ۳$

[سراسری، مدیریت، ۷۹]

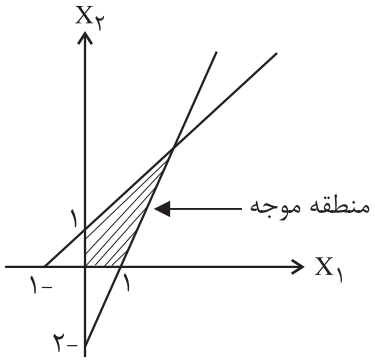
گزینه ۱

هم می توان معادلات محدودیت ها را طبق روش گفته شده نوشت:

$$\begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ \leq ۱۰ \\ ۲x_۱ - x_۲ = ۱ \\ x_۲ \geq ۳ \end{cases}$$

و هم می توان از طریق منطقی و با توجه به منطقه موجه (پاره خط AB) و بررسی گزینه ها به جواب رسید.

فضای هاشور خورده موجه زیر مفروض است، معادلات مربوطه کدامند؟



۱) $-x_1 + x_2 \leq 1$ و $x_1 - 0/5\, x_2 \geq 1$

۲) $-x_1 + x_2 \leq 1$ و $x_1 - 0/5\, x_2 \leq 1$

۳) $-x_1 + x_2 \geq 1$ و $x_1 - 0/5\, x_2 \leq 1$

۴) $-x_1 + x_2 \geq 1$ و $x_1 - 0/5\, x_2 \geq 1$

[سراسری، مدیریت، ۷۸]

گزینه ۲

داریم:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1 \\ 2x_1 - x_2 \le 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \underset{\div 2}{\text{محدودیت دوم}} \quad \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 - 0/5\, x_2 \le 1 \end{cases}$$

* هر محدودیت را می توان در هر عددی ضرب یا تقسیم نمود بدون آنکه مفهوم و مقدار آن تغییر یابد.

هنگامی که مختصات یک نقطه در یک محدودیت صدق کند به این معناست که ..... .

در منطقه موجه مربوط به آن محدودیت قرار دارد.

هنگامی که مختصات یک نقطه در معادله ی حدی یک محدودیت صدق کند، به این معناست که

.....

در روی آن محدودیت قرار گرفته است

مسأله برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید، نقطه ی ($x_۱ = ۱۰ \ , x_۲ = ۱ \ , x_۳ = ۲$) چگونه نقطه ای است؟ (گوشه موجه / گوشه غیرموجه / در داخل منطقه موجه / در خارج منطقه موجه)

$$Maxz = ۲x_۱ + x_۲ + ۳x_۳$$

$$\begin{cases} x_۱ + ۵x_۲ + x_۳ \leq ۲۰ \\ x_۱ \geq ۴ \\ ۱۰x_۲ + ۵x_۳ \leq ۲۵ \end{cases}$$

$$x_۱, x_۲, x_۳ \geq ۰$$

ایـــن نقطـــه در داخـــل منطقـــه ی موجـــه اســـت، زیـــرا بـــا جایگـــذاری آن در محـــدودیت هـــا مشـــاهده مـــی شـــود کـــه در هـــر ســـه محـــدودیت صـــدق مـــی کنـــد. (وهمـــین طـــور بـــرای دو محـــدودیت دیگـــر ☑ ۲۰≥۲ + (۱)۵ +۱۰اگـــر ایـــن نقطـــه در یـــک یـــا چنـــد محـــدودیت صدق نکند، در خارج از منطقه موجه است.)

اگر برای دو محدودیت، در معادله ی حدی صدق بکند (علامت محدودیت مساوی باشد) و در محدودیت دیگر به صورت عادی صدق بکند، نقطه ی گوشه ای موجه است.

اگر برای دو محدودیت، درمعادله ی حدی صدق بکند اما در محدودیت دیگر صدق نکند، نقطه ی گوشه ای غیرموجه است.

مسأله زیر را در نظر بگیرید:

$$Maxz = ۱۰x_۱ + ۲۰x_۲$$

$$st: \begin{cases} \frac{۱}{۲}x_۱ + ۲x_۲ \leq ۶ \\ x_۱ + ۲x_۲ \leq ۱۰ \end{cases}$$

$$x_۱, x_۲ \geq ۰$$

جواب $\left[x_۱ = ۲ , x_۲ = \frac{۱}{۲}\right]$ چگونه جوابی است؟

۱) یک گوشه موجه

۲) یک گوشه غیر موجه

۳) یک نقطه در داخل منطقه موجه و غیرگوشه ای

۴) یک نقطه در خارج از منطقه موجه و غیرگوشه ای

[سراسری، مدیریت، ۷۸]

گزینه ۳

نقطه ی داده شده را در محدودیت ها قرار می دهیم:

$$\frac{۱}{۲}(۲) + ۲\left(\frac{۱}{۲}\right) \leq ۶ \rightarrow ۲ \leq ۶$$
$$۱(۲) + ۲\left(\frac{۱}{۲}\right) \leq ۱۰ \rightarrow ۳ \leq ۱۰$$

پس نقطه داده شده در منطقه موجه هر دو محدودیت قرار دارد و بر روی معادله ی حدی هیچ یک نمی باشد. یعنی نقطه ای است در داخل منطقه موجه و غیرگوشه ای

محدودیت زائد چیست؟

۱ ص ۵۰

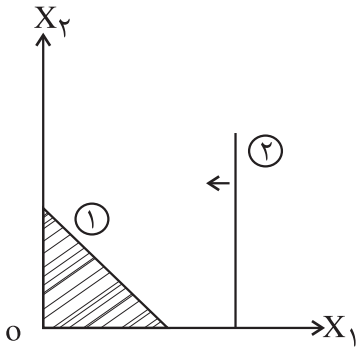
محدودیت زائد محدودیتی است که تأثیری درایجاد منطقه موجه نداشته و وجود یا عدم وجود آن موجب تغییر در منطقه موجه نمی گردد.

محدودیت موثر چیست؟

۱ ص ۵۰

محدودیت موثر محدودیتی است که در تشکیل منطقه موجه تأثیر گذار می باشد.

در مدل زیر، کدام محدودیت زائد و کدام موثر است؟



محدودیت ۱ موثر و محدودیت ۲ زائد است.

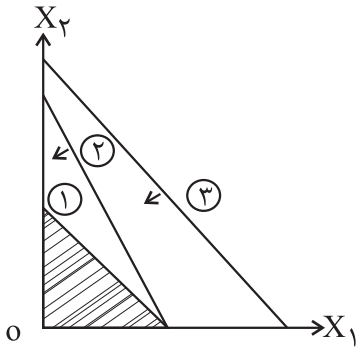
(چرا محدودیت دوم زائد است؟ چون نقشی در ایجاد منطقه موجه ندارد و حذف کردن آن نیز موجب تغییری در منطقه موجه نمی شود)

اضافه کردن هر محدودیت موثر جدید به مدل موجب ..... منطقه موجه و حذف محدودیت موثر موجب ..... منطقه موجه می گردد.

۱ ص ۵۰

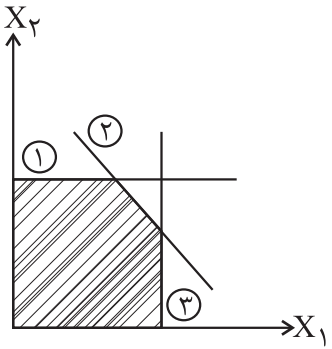
کاهش – افزایش

در مدل زیر کدام محدودیت زائد و کدام موثر است؟



محدودیت اول موثر و محدودیت دوم و سوم زائد هستند.

در مدل زیر کدام محدودیت زائد و کدام موثر است؟



هر سه محدودیت موثر هستند.

محدودیت های موثر به دو گروه تقسیم می شوند، آن دو را نام ببرید؟

۱۴ ص ۹۵

محدودیت های موثر
- محدودیت های موثر الزام آور
- محدودیت های موثر غیر الزام آور

محدودیت الزام آور چیست؟

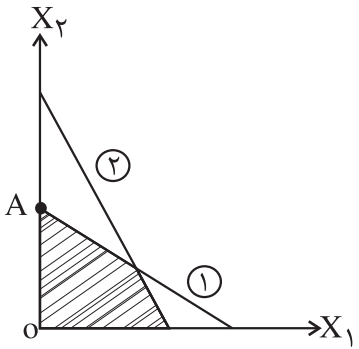
۱ ص ۵۱

محدودیت الزام آور، محدودیتی است موثر که نقطه بهینه بر روی معادله حدی آن قرار گرفته است.

محدودیت غیرالزام آور چیست؟

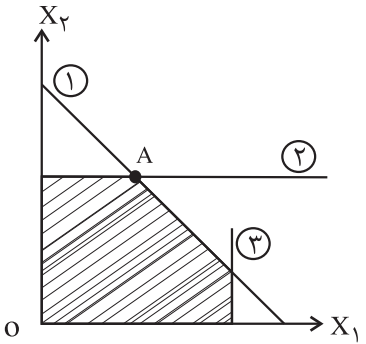
محدودیت غیرالزام آور محدودیتی موثر است، اما جواب بهینه بر روی معادله ی حدی آن نیست.

در مدل زیر، نقطه A جواب بهینه است، کدام محدودیت الزام آور و کدام غیر الزام آور است؟



محدودیت ۱ الزام آور و محدودیت ۲ غیرالزام آور است.

با توجه به بهینه بودن نقطه A، کدام محدودیت الزام آور و کدام غیرالزام آورند؟



محدودیت ۲ و ۱ الزام آور و محدودیت ۳ غیرالزام آور است.

محدودیت های زائد و موثر پس از ..... تعیین می گردند.

تعیین منطقه موجه

تفاوت محدودیت های الزام آور و غیرالزام آور بعد از ..... قابل تشخیص است.

۱ ص ۵۱

تعیین جواب بهینه

به محدودیت های الزام آور، محدودیت ..... و به محدودیت غیرالزام آور، محدودیت ..... نیز می گویند.

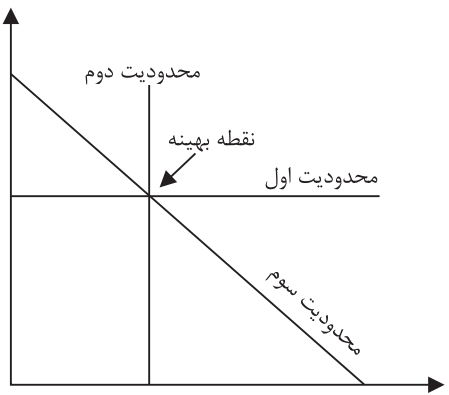
۱ ص ۵۱

فعال – غیرفعال

طبقه بندی محدودیت ها

محدودیت
- محدودیتهای زائد
- محدودیت های موثر
  - محدودیت های الزام آور (فعال)
  - محدودیت های غیر الزام آور (غیر فعال)

شکل زیر نمایش ترسیمی یک مدل برنامه ریزی خطی را نشان می دهد. کدام عبارت درست است؟



۱) محدودیت اول زائد و فعال است.

۲) محدودیت دوم زائد و فعال است.

۳) محدودیت سوم زائد و فعال است.

۴) محدودیت سوم زائد و غیرفعال است.

[سراسری، مدیریت، ۷۹]

هیچکدام

برای پاسخ گفتن به این سؤال باید منطقه ی موجه مشخص باشد.

محدودیت زائد محدودیتی است که تأثیری در ایجاد منطقه ی موجه ندارد. محدودیت موثر در تشکیل منطقه ی موجه موثر است.

محدودیت فعال (الزام آور) محدودیتی است موثر که نقطه بهینه روی معادله مربوط به آن محدودیت قرار گرفته است.

البته اگر منطقه مربع شکل را منطقه موجه فرض کنیم، در آنصورت گزینه ۴ صحیح است. در این حال اگرچه نقطه بهینه روی معادله حدی محدودیت سوم نیز قرار دارد، اما معادلات تعیین کننده این نقطه، معادلات حدی اول و دوم بوده اند و حذف محدودیت سوم تأثیری بر منطقه موجه و نقطه بهینه نخواهد داشت.

در مدل برنامه ریزی خطی زیر کدام یک از محدودیت ها فعال و کدام یک از آنها غیر فعال است؟

$$
\begin{aligned}
&Min\ z = ۵,۰۰۰E + ۴,۰۰۰F \\
&s.t. \quad E + F \geq ۵ \qquad (۱)\\
&\qquad E - ۳F \leq ۰ \qquad (۲)\\
&\qquad ۱۰E + ۱۵F \leq ۱۵۰ \qquad (۳)\\
&\qquad ۲۰E + ۱۰\ F \leq ۱۶۰ \qquad (۴)\\
&\qquad ۳۰E + ۱۰F \geq ۱۳۵ \qquad (۵)\\
&\qquad E, F \geq ۰
\end{aligned}
$$

۱) محدودیت های (۳) و (۴) فعال و بقیه غیرفعال اند.

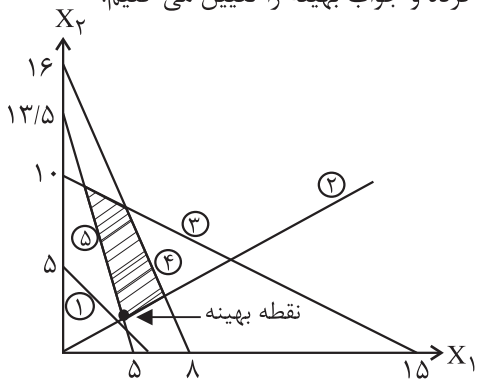
۲) محدودیت های (۲) و (۴) فعال و بقیه غیرفعال اند.

۳) محدودیت های (۲) و (۵) فعال و محدودیت (۱) مازاد و بقیه غیرفعال اند.

۴) محدودیت های (۲) و (۳) و (۴) و (۵) فعال و محدودیت (۱) مازاد است. [آزاد، صنعتی، ۸۲]

گزینه ۳

نام متغیرها را E و F گذاشته که تفاوتی با حالت x_1 و x_2 ندارد و فقط اسم آنها تغییر کرده، آنها را همان x_1 و x_2 در نظر گرفته و منطقه موجه را رسم کرده و جواب بهینه را تعیین می کنیم:



در صورتی که منطقه موجه یک مسأله برنامه ریزی خطی، ربع اول باشد، کدام محدودیت زائد است؟

۱) $x_1 + x_2 \geq 0$

۲) $x_1 - x_2 \geq 0$

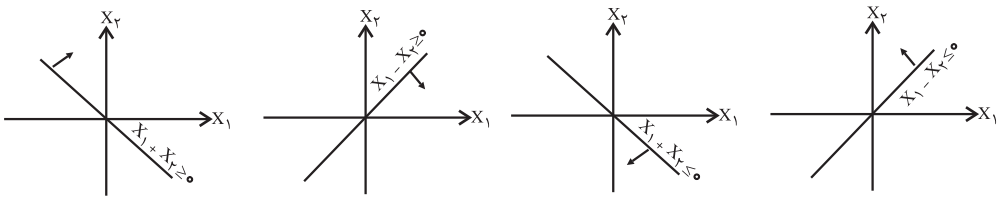
۳) $x_1 + x_2 \leq 0$

۴) $x_1 - x_2 \leq 0$

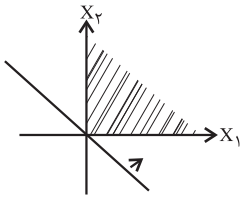
[آزاد، بازرگانی، ۸۷]

گزینه ۱

رسم هر یک از محدودیت های ارائه شده به صورت زیر است:



پس محدودیت اول زائد است، چون در صورت غیرمنفی بودن متغیرها، محدودیت گزینه ۱ معنای زیر را دارد:



یعنی همان $x_j \geq 0$

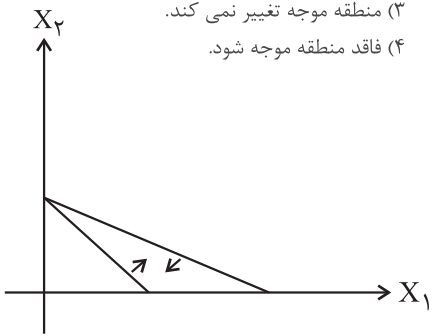
مسأله زیر را در نظر بگیرید، دو محدودیت اول و دوم رسم شده اند. اضافه شدن محدودیت $۳x_۱ + x_۲ = ۳$ موجب می شود که .....

۱) منطقه ی موجه یک نقطه شود.

۲) منطقه موجه یک پاره خط شود.

۳) منطقه موجه تغییر نمی کند.

۴) فاقد منطقه موجه شود.



$$Minz = ۴x_۱ + x_۲$$

$$st: \begin{cases} ۴x_۱ + ۳x_۲ \geq ۶ \\ x_۱ + ۲x_۲ \leq ۴ \\ x_۲ \geq \frac{۹}{۵} \\ x_۱ \geq ۰ \end{cases}$$

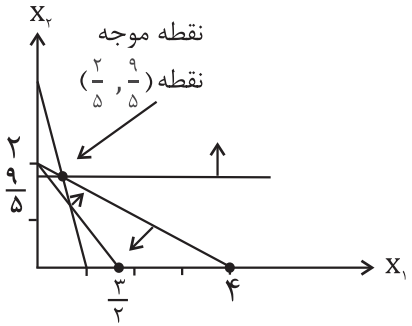
$$x_۱, x_۲ \geq ۰$$

[سراسری، مدیریت، ۸۸]

گزینه ۱

ابتدا محدودیت سوم صورت سوال را نیز رسم نموده و بعد محدودیت جدید را اضافه می کنیم.

منطقه موجه نقطه ی $\left[\frac{۲}{۵}, \frac{۹}{۵}\right]$ خواهد بود.



* راه حل بهتر آنست که ابتدا محدودیت اول، دوم و چهارم را رسم کرده و در منطقه موجه بدست آمده که یک پاره خط است، محدودیت سوم را تست کنیم.

یک محدودیت مساوی را چگونه می توان به محدودیت هایی با علامت نامساوی تغییر داد؟

۱۰ ص ۳۱

هر محدودیت تساوی را می توان با دو محدودیت که دارای همان متغیرها و ضرایب و اعداد سمت راست باشند، یکی با علامت $\leq$ و دیگری با علامت $\geq$ جایگزین کرد.

به جای یک محدودیت با علامت مساوی، می توان دو محدودیت با علامت ..... و ..... نوشت.

۳ ص ۲۲

کوچکتر مساوی – بزرگتر مساوی

به جای محدودیت زیر ، دو محدودیت در جهت مخالف بنویسید؟

$$a_{۱۱}x_{۱} + a_{۱۲}x_{۲} = b_{۱}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1 \end{cases}$$

محدودیت زیر را بصورتی بنویسید که علامت مساوی در آن نباشد؟

- ☐
- ☐ $۲X_۱ + X_۲ = ۶$
- ☐
- ☐
- ☐

$$\begin{cases} ۲X_۱ + X_۲ \leq ۶ \\ ۲X_۱ + X_۲ \geq ۶ \end{cases}$$

محدودیت را با دو محدودیت فوق جایگزین می نماییم.**(حالت ترسیمی هیچ تغییری نمی کند)**

در صورتیکه مدلی دارای چند محدودیت با علامت مساوی باشد و بخواهیم که هیچ محدودیتی با علامت مساوی وجود نداشته، در ساده ترین صورت، هر محدودیت را با دو محدودیت با علامت نامساوی تعویض می‌کنیم، این کار برای مدلی با چند محدودیت چه مشکلی ایجاد می کند و برای رفع آن چه می توان کرد؟

۱۰ ص ۳۲

استفاده از روش گفته شده موجب افزایش حجم عملیات می گردد، زیرا به ازای هر محدودیت تساوی، دو محدودیت نامساوی جایگزین و تعداد محدودیت ها دو برابر می گردد. مثلاً مسأله ای با ۵ محدودیت تساوی ، به مساله ای با ۱۰ محدودیت نامساوی تبدیل خواهد شد. برای رفع این مشکل از روش زیر استفاده می کنیم:

گام ۱ : تمامی محدودیت های تساوی را بصورت «کوچکتر یا مساوی» (یا « بزرگتر یا مساوی ») بنویسید.

گام ۲ : متغیرهای سمت چپ تساوی تمامی محدودیت ها را با هم جمع کنید. به همین ترتیب، مجموع اعداد سمت راست محدودیت ها را نیز با هم جمع نمایید. آنگاه مجموع متغیرهای سمت چپ را، اگر در گام ۱ محدودیت ها را بصورت«کوچکتر یا مساوی» نوشته اید، بصورت «بزرگتر یا مساوی» مجموع اعداد سمت راست قرار دهید و اگر در گام اول از علامت«بزرگتر یا مساوی» استفاده کرده اید، مجموع متغیرهای سمت چپ را «کوچکتر یا مساوی» مجموع اعداد سمت راست قرار دهید. به این ترتیب فقط یک محدودیت به محدودیت های مسأله اضافه می شود.

(توجه : اگر توضیح بالا را را به خوبی متوجه نشدید، ابتدا مثال موجود در کارت بعدی را مطالعه کنید و سپس مجدداً روش توضیح داده شده را بخوانید)

محدودیت های تساوی مدل زیر را به نامساوی تبدیل کنید؟

$$Max\ Z = ۸x_۱ + ۶x_۲$$

$$\begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ = ۸ \\ x_۱ + x_۲ = ۴ \\ ۳x_۱ + x_۲ = ۵ \end{cases}$$

$X_۱$ و $X_۲ \geq ۰$

نتیجه گام ۱ :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ 3x_1 + x_2 \leq 5 \end{cases}$$

نتیجه گام ۲ :

$$5x_1 + 4x_2 \geq 17$$

مدل کامل :

$$Max\ Z = 8x_1 + 6x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ 3x_1 + x_2 \leq 5 \\ 5x_1 + 4x_2 \geq 17 \end{cases}$$

X_1 و $X_2 \geq 0$

دو محـــدودیت نامســـاوی بـــا متغیرهـــا و پارامترهـــای یکســـان امـــا جهـــت هـــای متفـــاوت، قابل تبدیل به ..... هستند.

۱۶ص ۱۵

یک محدودیت با علامت تساوی

یعنی:

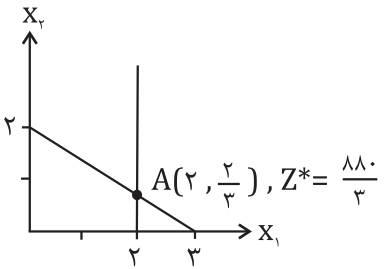
$$\begin{matrix} a_1x_1 + a_2x_2 \le b \\ a_1x_1 + a_2x_2 \ge b \end{matrix} \Rightarrow a_1x_1 + a_2x_2 = b$$

مدل زیر و جواب بهینه آن را در نظر بگیرید، محدودیت های تساوی را به نامساوی تبدیل کرده و جواب بهینه را بیابید؟

$$Maxz = ۱۰۰x_۱ + ۱۴۰x_۲$$

$$\begin{cases} ۲x_۱ + ۳x_۲ = ۶ \\ x_۱ = ۲ \end{cases}$$

$$x_۱ , x_۲ \geq ۰$$

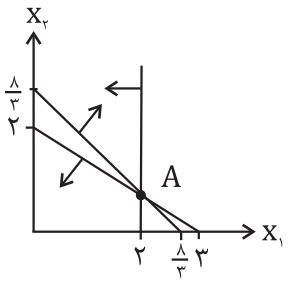


(نقطه A منطقه موجه و جواب بهینه است)

$$Maxz = ۱۰۰x_۱ + ۱۴۰x_۲$$

$$\begin{cases} ۲x_۱ + ۳x_۲ \leq ۶ \\ x_۱ \leq ۲ \\ ۳x_۱ + ۳x_۲ \geq ۸ \end{cases}$$

$$x_۱ , x_۲ \geq ۰$$



نقطه A منطقه موجه و جواب بهینه است و داریم:

$$A(۲ , \frac{۲}{۳}) , Z^* = \frac{۸۸۰}{۳}$$

در یک مسأله ی برنامه ریزی خطی، چگونه می توان یک تابع هدف Min را به Max تبدیل کرد؟

(یا بالعکس)

۳ ص ۲۲

با ضرب کردن تابع هدف در (-)، تابع هدف Min به Max تبدیل می شود (و بالعکس)

مدل زیر را با تابع هدف Max بنویسید؟

- $Minz = ۲x_۱ - x_۲$
- $st: \{x_۱ + ۲x_۲ \leq ۶$
- $x_۱ , x_۲ \geq ۰$

$$Max(-z) = -۲x_۱ + x_۲$$

$$st: \{x_۱ + ۲x_۲ \leq ۶$$

$$x_۱ , x_۲ \geq ۰$$

(منطقه ی موجه و نقطه ی بهینه هیچ تغییری نمی کنند چون برای بدست آوردن جواب Max(-z) یا Min (-z) در ترسیمی، مجدداً باید آن را در منفی ضرب کرد تا همان Max یا Min بدست آید)

چگونه می توان علامت $\geq$ محدودیت ها را به $\leq$ تبدیل کرد ؟ (یا بالعکس)

۳ ص ۲۲

با ضرب کردن محدودیت در (-)، علامت آن برعکس می گردد.

محدودیت های زیر را با علامت $\leq$ بنویسید؟

- $-x_1 + 2x_2 \geq -4$
- $x_2 \geq -3$

$$x_۱ - ۲x_۲ \leq -۴$$

$$-x_۲ \leq ۳$$

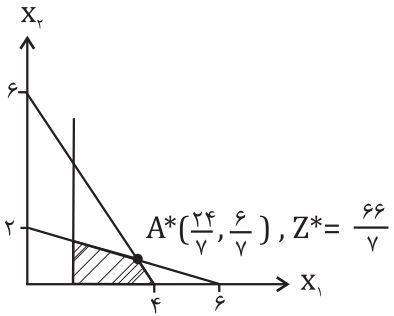
(حالت ترسیمی محدودیت ها هیچ تغییری نمی کند)

مدل زیر و جواب بهینه آن را در نظر بگیرید، علامت همه محدودیت ها را برعکس کنید و جواب بهینه آن را بیابید؟

$$Maxz = ۲x_۱ + ۳x_۲$$

$$\begin{cases} ۳x_۱ + ۲x_۲ \leq ۱۲ \\ x_۱ + ۳x_۲ \leq ۶ \\ x_۱ \geq ۲ \end{cases}$$

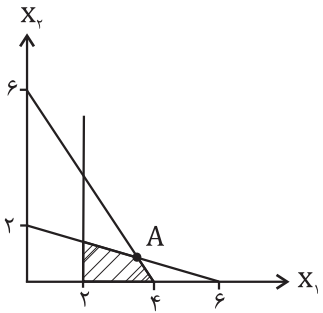
$$x_۱ , x_۲ \geq ۰$$



$$Maxz = ۲x_۱ + ۳x_۲$$

$$\begin{cases} -۳x_۱ - ۲x_۲ \geq -۱۲ \\ -x_۱ - ۳x_۲ \geq -۶ \\ -x_۱ \leq -۲ \end{cases}$$

$$x_۱ , x_۲ \geq ۰$$



مشاهده می گردد که منطقه موجه و جواب بهینه هیچ تغییری نکرده است و داریم:

$$A^*(\frac{۲۴}{۷}, \frac{۶}{۷}) , Z^* = \frac{۶۶}{۷}$$

به جای متغیری که قید علامت ندارد (آزاد را در علامت)، می توان ..... را قرار داد.

۳ ص ۲۲

تفاضل دو متغیر غیر منفی

متغیر آزاد در علامت زیر را به دو متغیر غیرمنفی تبدیل کنید؟

آزاد در علامت x_1

۳ ص ۲۲

$$x_1 = x_1' - x_1''$$

$$x_1', x_1'' \geq 0$$

متغیر آزاد در علامت را از مدل زیر حذف کنید (قید آزاد در علامت بودن حذف شود)

$$Max z = ۲x_۱ + x_۲$$
$$\begin{cases} ۲x_۱ + ۲x_۲ \leq ۶ \\ -x_۱ + x_۲ \geq ۱ \end{cases}$$
$$x_۲ \geq ۰$$

$x_۱$ آزاد در علامت

به جای x_1 آزاد در علامت، $(x_1' - x_1'')$ را قرار داده و آنرا در تابع هدف و محدودیت ها جایگذاری می کنیم، سپس شرط غیرمنفی بودن x_1'' و x_1' را به انتهای مدل می افزائیم:

$$Maxz = 2(x_1' - x_1'') + x_2 \qquad\qquad Maxz = 2x_1' - 2x_1'' + x_2$$

$$\begin{cases} 2(x_1' - x_1'') + 2x_2 \le 6 \\ -(x_1' - x_1'') + x_2 \ge 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1' - 2x_1'' + 2x_2 \le 6 \\ -x_1' + x_1'' + x_2 \ge 1 \end{cases}$$

$$x_1', x_1'', x_2 \ge 0 \qquad\qquad x_1', x_1'', x_2 \ge 0$$

(x_1' را بخوانید x_1 پریم و x_1'' را بخوانید x_1 زگوند)

قید آزاد در علامت بودن را از مدل زیر حذف کنید؟

$$\text{Min } z = x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 3 \\ x_2 \leq 6 \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0$, x_2 آزاد در علامت

$x_۲ = (x'_۲ - x''_۲)$ را جایگذاری کرده و در انتها شرط غیرمنفی بودن $x'_۲$ و $x''_۲$ را می افزائیم:

$$Min\ Z = x_۱ + ۴(x'_۲ - x''_۲)$$

$$\begin{cases} ۲x_۱ - (x'_۲ - x''_۲) \le ۱۰ \\ x_۱ \ge ۳ \\ (x'_۲ - x''_۲) \le ۶ \\ ۳x_۱ + ۲(x'_۲ - x''_۲) \ge ۰ \end{cases}$$

$$x_۱ , x'_۲ , x''_۲ \ge ۰$$

$$\Longrightarrow$$

$$Min\ Z = x_۱ + ۴x'_۲ - ۴x''_۲$$

$$\begin{cases} ۲x_۱ - x'_۲ + x''_۲ \le ۱۰ \\ x_۱ \ge ۳ \\ x'_۲ - x''_۲ \le ۶ \\ ۳x_۱ + ۲x'_۲ - ۲x''_۲ \ge ۰ \end{cases}$$

$$x_۱ , x'_۲ , x''_۲ \ge ۰$$

مدل زیر معادل با کدام مدل است؟

$$\min z = x_1 + 3x_2 + 4x_3$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$$
$$x_2, x_3 \geq 0 \qquad x_1 \text{ آزاد در علامت}$$

۱)
$$\min z = x_2 + 3x_3 + 5$$
$$x_2 + x_3 = 4$$
$$x_2, x_3 \geq 0$$

۲)
$$\min z = -x'_1 - x''_1 + 3x_3 + 4x_3$$
$$-x'_1 - x''_1 + 2x_3 + x_3 = 5$$
$$2x'_1 + x''_1 + 3x_3 + x_3 = 6$$
$$x'_1, x''_1, x_2, x_3 \geq 0$$

۳)
$$\min z = x_1 + 3x'_2 - 3x''_2 + 4x_3$$
$$x_1 + 2x'_2 - 2x''_2 + x_3 = 5$$
$$2x_1 + 3x'_2 - 3x''_2 + x_3 = 6$$
$$x_1, x'_2, x''_2, x_3 \geq 0$$

۴)
$$\min z = x_1 + 3x'_2 + 3x''_2 - 4x_3$$
$$x_1 + 2x'_2 - 2x''_2 + x_3 = 5$$
$$2x_1 + 3x'_2 - 3x''_2 + x_3 = 6$$
$$x_1, x'_2, x''_2, x_2, x_3 \geq 0$$

[سراسری، مدیریت، ۸۲]

گزینه ۱

در صورتی که x_i آزاد در علامت باشد، مـی تـوانیم آن را بـا $(x_i' - x_i'')$ جـایگزاری کـرده و شـرط $x_i' , x_i'' \geq ۰$ را در نظر بگیریم، در این صورت برای این سوال خواهیم داشت:

$$Minz = x_۱' - x_۱'' + ۳x_۲ + ۴x_۳$$
$$\begin{cases} x_۱' - x_۱'' + ۲x_۲ + x_۳ = ۵ \\ ۲x_۱' - ۲x_۱'' + ۳x_۲ + x_۳ = ۶ \end{cases}$$
$$x_۱' , x_۱'' , x_۲ , x_۳ \geq ۰$$

پس گزینه های ۴ , ۳ , ۲ اشتباه هستند و گزینه ی ۱ را انتخاب می کنیم.

در گزینه ۱ چه شده است؟

راه دیگر برای حذف متغیر آزاد در علامت اینست که آن را بر حسب متغیرهای دیگر بنویسـیم. بـرای این کار، مقدار $x_۱$ را در محدودیت اول برحسب متغیرهای دیگـر مـی نویسـیم یعنـی $x_۱$ را بـه یـک سمت و دیگر متغیرها را به سمت دیگر مساوی منتقل می کنیم:

(ادامه جواب در فیش بعد)

$$x_۱ + ۲x_۲ + x_۳ = ۵ \;\rightarrow\; x_۱ = ۵ - ۲x_۲ - x_۳$$

سپس مقدار $x_۱$ را در مدل جایگذاری می کنیم:

$$\begin{aligned} &Min\ z = (۵ - ۲x_۲ - x_۳) + ۳x_۲ + ۴x_۳ \\ &\begin{cases} (۵ - ۲x_۲ - x_۳) + ۲x_۲ + x_۳ = ۵ \\ ۲(۵ - ۲x_۲ - x_۳) + ۳x_۲ + x_۳ = ۶ \end{cases} \\ &x_۲ , x_۳ \geq ۰ \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} &Minz = x_۲ + ۳x_۳ + ۵ \\ &\{x_۲ + x_۳ = ۴ \\ &x_۲ , x_۳ \geq ۰ \end{aligned}$$

برای حذف قدر مطلق از محدودیت زیر، چه باید کرد؟

$$|a_{۱۱}x_۱ + a_{۱۲}x_۲| \geq \mathrm{b}$$

باید آن را با دو محدودیت زیر جایگزین کرد:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq -b \end{cases}$$

علامت قدر مطلق را از محدودیت زیر حذف کنید؟

$$|۲x_۱ + ۴x_۲| \geq ۸$$

$$\begin{cases} ۲x_۱ + ۴x_۲ \geq ۸ \\ ۲x_۱ + ۴x_۲ \leq -۸ \end{cases}$$

* با ضرب کردن محدودیت دوم در منفی، می توان مجموعه فوق را بصورت زیر هم نوشت:

$$\begin{cases} ۲x_۱ + ۴x_۲ \geq ۸ \\ -۲x_۱ - ۴x_۲ \geq ۸ \end{cases}$$

برای حذف قدر مطلق از محدودیت زیر، چه باید کرد؟

$$|a_{11}x_1 + a_{12}x_2| \leq b$$

۳ ص ۲۲

باید آن را با دو محدودیت زیر جایگزین کرد:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq -b \end{cases}$$

علامت قدر مطلق را از محدودیت زیر حذف کنید؟

$$|x_1 + 3x_2| \leq 6$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 + 3x_2 \geq -6 \end{cases}$$

* با ضرب کردن محدودیت دوم در منفی، می توان مجموعه فوق را بصورت زیر هم نوشت:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ -x_1 - 3x_2 \leq 6 \end{cases}$$

محدودیت های زیر را از قدرمطلق خارج کنید؟

$$\begin{cases} |۲x_۱ - ۳x_۲| \leq ۴ \\ |-x_۱ + x_۲| \geq ۱ \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۲x_۱ - ۳x_۲ \leq ۴ \\ ۲x_۱ - ۳x_۲ \geq -۴ \\ -x_۱ + x_۲ \geq ۱ \\ -x_۱ + x_۲ \leq -۱ \end{cases} \xrightarrow{\text{و یا}} \begin{cases} ۲x_۱ - ۳x_۲ \leq ۴ \\ -۲x_۱ + ۳x_۲ \leq ۴ \\ -x_۱ + x_۲ \geq ۱ \\ x_۱ - x_۲ \geq ۱ \end{cases}$$

* به یاد داریم که برای تغییر جهت علامت نامساوی محدودیت، باید کل آن را در منفی ضرب کرد.

منطقه موجه مربوط به مدل مقابل را رسم کنید؟

$$Max z = ۲x_۱ + x_۲$$

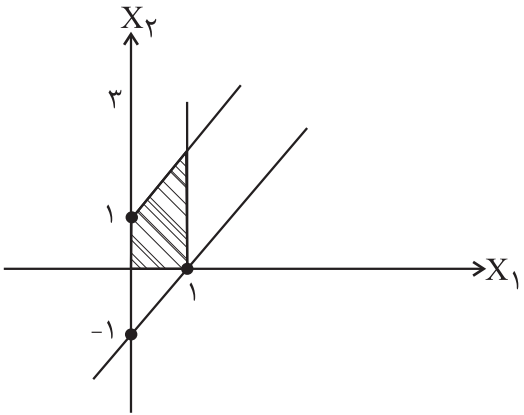
$$st: \begin{cases} |x_۱ - x_۲| \leq ۱ \\ x_۱ \leq ۱ \end{cases}$$

$$x_۱, x_۲ \geq ۰$$

با خارج کردن محدودیت اول از قدر مطلق داریم:

$$st:\begin{cases} x_۱ - x_۲ \leq ۱ \\ -x_۱ + x_۲ \leq ۱ \\ x_۱ \leq ۱ \end{cases}$$

$$x_۱, x_۲ \geq ۰$$



منطقه جواب مسأله برنامه ریزی با وجود محدودیت های مقابل کدامست؟

$$\begin{cases} |۲x_۱ + x_۲| \leq ۶ \\ |x_۱ - ۲x_۲| \leq ۶ \end{cases}$$

۱) یک مثلث

۲) یک مربع

۳) یک چهار ضلعی غیرمنتظم

۴) منطقه جواب ندارد

[سراسری، مدیریت، ۸۵]

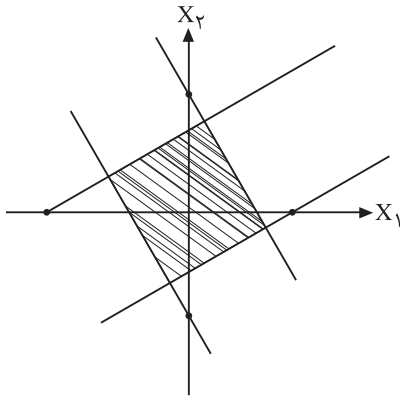
گزینه۳

با توجه به اینکه قید علامتی متغیرها ذکر نشده، آنها را بدون قید علامتی (یعنی آزاد در علامت) در نظر می گیریم، همچنین عبارات را جهت رسم، ابتدا از قدر مطلق خارج می نمائیم.

$$|ax_۱ + bx_۲| \le c \rightarrow \begin{cases} ax_۱ + bx_۲ \le c \\ ax_۱ + bx_۲ > -c \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۲x_۱ + x_۲ \le ۶ \\ ۲x_۱ + x_۲ \ge -۶ \\ x_۱ - ۲x_۲ \le ۶ \\ x_۱ - ۲x_۲ \ge -۶ \end{cases} \xrightarrow{\text{یا}} \begin{cases} ۲x_۱ + x_۲ \le ۶ \\ -۲x_۱ - x_۲ \le ۶ \\ x_۱ - ۲x_۲ \le ۶ \\ -x_۱ + ۲x_۲ \le ۶ \end{cases}$$

آزاد در علامت $x_۲$ و $x_۱$



هنگـــامی کـــه یـــک تـــابع هـــدف بصـــورت کســـری باشـــد و صـــورت آن یـــک عـــدد ثابـــت باشـــد، چگونه می توان با تغییر نوع تابع هدف، آن را ساده تر کرد؟

۱۶ص ۹

مثلاً اگر تابع هدف Max بود، می توان مخرج کسر را Min سازی کرد (بعنوان تابع هدف در نظر گرفت)

یعنی:

$$\max z = \frac{a}{f(x_i)}$$

برابر است با:

$$\min z' = f(x_i)$$

(چرا؟ چون تابع هدفی مانند $\frac{a}{f(x_i)}$ که صورت آن یک عدد ثابت است، زمانی حداکثر می شود که مخرج آن حداقل گردد و بالعکس)

تابع هدف زیر را ساده کنید؟

$$\max z = \frac{۵}{۲x_۱ + ۳x_۲}$$

$$\min z' = ۲x_۱ + ۳x_۲$$

البته این کار فقط برای حل مسأله انجام می گیرد و در نهایت برای محاسبه مقدار جواب، تابع هدف اصلی را در نظر می گیریم.

مدل معادل با مدل زیر کدام است؟

$$min\ z = \frac{۱}{۳x_۱ - ۳x_۲ + ۷x_۳}$$

$$st: |۵x_۱ + ۴x_۲ - ۸x_۳| \le ۱۰۰$$

$$x_۱, x_۲, x_۳ \ge ۰$$

۱) $max\ z' = -۳x_۱ + ۳x_۲ - ۷x_۳$

$۵x_۱ + ۴x_۲ - ۸x_۳ \le ۱۰۰$

$۵x_۱ + ۴x_۲ - ۸x_۳ \le -۱۰۰$

$x_۱, x_۲, x_۳ \ge ۰$

۲) $min\ z' = ۳x_۱ - ۳x_۲ + ۷x_۳$

$۵x_۱ + ۴x_۲ - ۸x_۳ \le ۱۰۰$

$۵x_۱ + ۴x_۲ - ۸x_۳ \ge -۱۰۰$

$x_۱, x_۲, x_۳ \ge ۰$

۳) $max\ z' = ۳x_۱ - ۳x_۲ + ۷x_۳$

$۵x_۱ + ۴x_۲ - ۸x_۳ \le ۱۰۰$

$۵x_۱ + ۴x_۲ - ۸x_۳ \ge -۱۰۰$

$x۱, x۲, x۳ \ge ۰$

۴) $min\ z' = -۳x_۱ + ۳x_۲ - ۷x_۳$

$۵x_۱ + ۴x_۲ - ۸x_۳ \le ۱۰۰$

$-۵x_۱ - ۴x_۲ + ۸x_۳ \ge -۱۰۰$

$x_۱, x_۲, x_۳ \ge ۰$ [سراسری، مدیریت، ۸۲]

گزینه ۳

با توجه به کسری بودن تابع هدف و این که صورت کسر عددی ثابت است، این نسبت زمانی حـداقل می شود که مقدار مخرج حداکثر شود، در نتیجه تابع هدف را با هدف زیر جایگزین می کنیم:

$$Maxz' = ۳x_۱ - ۳x_۲ + ۷x_۳$$

محدودیت را نیز به صورت زیر از قدر مطلق خارج می کنیم:

$$|۵x_۱ + ۴x_۲ - ۸x_۳| \leq ۱۰۰ \quad \rightarrow \begin{cases} ۵x_۱ + ۴x_۲ - ۸x_۳ \leq ۱۰۰ \\ ۵x_۱ + ۴x_۲ - ۸x_۳ \geq -۱۰۰ \end{cases}$$

مدل زیر را در نظر بگیرید. کدام مدل معادل این مدل خواهد بود؟

$$Max z = \frac{۱}{x_۱+x_۲}$$
$$s.t:$$
$$|x_۱ + ۳x_۲| \leq ۲۰$$
$$x_۱ + x_۲ = ۸$$
$$x_۱, x_۲ \geq ۰$$

۱) $Min\ \acute{z} = x_۱ + x_۲$
$$s.t.\ x_۱ + ۳x_۲ \leq ۲۰$$
$$x_۱ + ۳x_۲ \geq -۲۰$$
$$x_۱ + x_۲ = ۸$$
$$x_۱, x_۲ \geq ۰$$

۲) $Min\ \acute{z} = \frac{۱}{۲}(x_۱ + x_۲)$
$$s.t.\ x_۱ + ۳x_۲ \geq -۲۰$$
$$x_۱ + ۳x_۲ \leq -۲۰$$
$$x_۱ + x_۲ = ۸$$
$$x_۱, x_۲ \geq ۰$$

۳) $Max\acute{z} = \frac{۱}{x_۱+x_۲}$
$$s.t.\ x_۱ + x_۲ \geq\ x_۱ + ۳x_۲$$
$$x_۱ + ۳x_۲ \geq ۲۰$$
$$x_۱ + x_۲ = ۸$$
$$x_۱, x_۲ \geq ۰$$

۴) $Min\ \acute{z} = x_۱ + x_۲$
$$s.t.\ \frac{۱}{x_۱+x_۲} \geq ۶$$
$$x_۱ + ۳x_۲ \leq ۲۰$$
$$x_۱ + x_۲ = ۸$$
$$x_۱, x_۲ \geq ۰$$

[آزاد، بازرگانی، ۸۵]

گزینه ۱

تابع هدف عبارتی کسری یا صورت ثابت است، این عبارت در صورتی Max می شود که مخرج آن Min شود.

بنابراین تابع هدف را بصورت $Min\ z = x_1 + x_2$ می نویسیم.

محدودیت قدرمطلق را نیز می توان به شکل زیر در دو محدودیت نوشت:

$$|ax_1 + bx_2| \leq b_1 \rightarrow \begin{cases} ax_1 + bx_2 \leq b_1 \\ ax_1 + bx_2 \geq -b_1 \end{cases}$$

$$|ax_1 + bx_2| \geq b_2 \rightarrow \begin{cases} ax_1 + bx_2 \geq b_2 \\ ax_1 + bx_2 \leq -b_2 \end{cases}$$

هنگامی که یک تابع هدف بصورت کسری باشد و مخرج آن یک عدد ثابت باشد، چگونه می توان با تغییر نوع تابع هدف، آن را ساده تر کرد؟

۱۶ص ۹

اگــر مخــرج کســر مقــدار ثــابتی باشــد مــی تــوان بــدون تغییــر نــوع تــابع هــدف صــورت کسر را بهینه نمود (مخرج کسر برای انجام حل قابل حذف است)

تابع هدف زیر را ساده کنید؟

$$\max z = \frac{۲x_۱ + ۳x_۲}{۵}$$

$$\max z' = ۲x_۱ + ۳x_۲$$

مخـرج را حـذف مـی کنـیم. البتـه ایـن کـار فقـط بـرای حـل مسـأله انجـام مـی گیـرد و در نهایت برای محاسبه مقدار جواب، تابع هدف اصلی را در نظر می گیریم.

منظور از نقاط گوشه و نقاط گوشه موجه در برنامه ریزی خطی چیست؟

نقاط گوشه نقاطی هستند که از برخورد معادلات حدی محدودیت ها با یکدیگر، برخورد معادلات حدی محدودیت ها با محورهای مختصات و یا از برخورد خود محورهای مختصات با یکدیگر پدید می آید.

نقاط گوشه موجه، نقاط گوشه ای هستند که در منطقه موجه مسأله قرار دارند.

در مسائل برنامه ریزی خطی، تعداد نقاط گوشه از چه فرمولی محاسبه می گردد؟

۱ ص ۷۷

در مسائل برنامه ریزی خطی، تعداد نقاط گوشه از فرمول زیر محاسبه می گردد که در آن m تعداد متغیرهای تصمیم و n تعداد محدودیت هاست.

$$\frac{(m+n)!}{m!\ n!}$$

یادآوری:

!۵ برابر چند است؟

(بخوانید پنج فاکتوریل)

$$۵! = ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۱۲۰$$

همچنین بعنوان مثال:

$$۳! = ۳ \times ۲ \times ۱ = ۶$$

$$۴! = ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۲۴$$

در تعیین نقاط گوشه، هرگاه در مسأله ای ..... و حالت خاص ..... وجود داشته باشد، تعداد نقاط شمارش شده از روی شکل و تعداد نقاط محاسبه شده از فرمول، به ظاهر متفاوت است.

۴ ص ۹

خطوط موازی – تبهگن

.....

زیرا امکان وقوع این اشتباه وجود دارد که نقطه تبهگن فقط به عنوان یک نقطه شمارش شود و محل تقاطع دو خط موازی که در بی نهایت است شمارش نشود. پس همواره در تعیین تعداد نقاط گوشه، از فرمول استفاده کنید.

تعداد نقاط گوشه در مدل زیر چندتاست؟

$$Maxz = x_۱ + ۲x_۲$$

$$st: \begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ \leq ۴ \\ ۲x_۱ + x_۲ \leq ۴ \\ x_۲ \leq ۱ \end{cases}$$

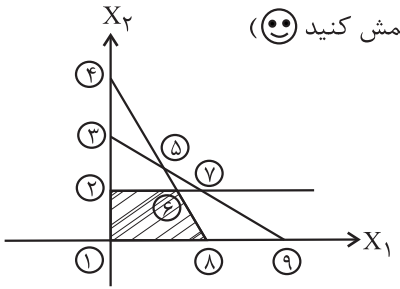
$$x_۱, x_۲ \geq ۰$$

با توجه به رابطه ی $\frac{(m+n)!}{m!\ n!}$ داریم:

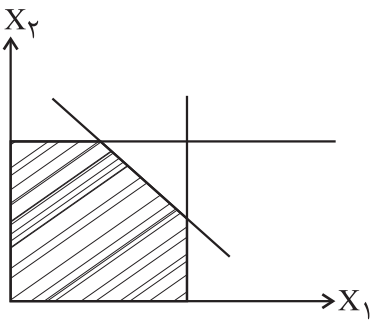
$$\frac{(۳+۲)!}{۳!\ ۲!} = ۱۰$$

تعداد نقاط گوشه باید از فرمول محاسبه شود، اما به منظور درک موضوع، حالت ترسیمی این مدل رسم گردیده و تعداد نقاط گوشه شماره گذاری شده است:

محدودیت سوم نیز موازی محور $x_۱$ است و دو خط موازی یکدیگر را در بی نهایت قطع می کنند، از این رو نقطه دهم هم آنجاست. (اگه دوس دارید رسمش کنید ☺)



تعداد نقاط گوشه ای (تعداد کل) در مسأله زیر چندتا است؟



۱) ۹

۲) ۱۰

۳) ۸

۴) ۵

[آزاد، بازرگانی، ۸۳]

گزینه ۲

تعداد نقاط گوشه ای را با فرمول $\frac{(m+n)!}{m!\ n!}$ محاسبه می کنیم که در آن، m تعداد محدودیت ها و n تعداد متغیرهای تصمیم می باشند. در این مدل سه محدودیت و دو متغیر ($x_۱$ و $x_۲$) وجود دارد. پس داریم:

$$\frac{(۲+۳)!}{۲!\ ۳!} = ۱۰$$

منطقه جواب مسئله برنامه ریزی خطی زیر چند نقطه گوشه ای دارد؟

$$|x_i| \leq ۴$$
$$x_i \geq ۲$$
$$x_۱ = x_۲$$
$$x_۱ + x_۲ \leq ۴$$

برای $i = ۱ , ۲$

۱) یک نقطه

۲) دو نقطه

۳) سه نقطه

۴) چهار نقطه

[سراسری، مدیریت، ۸۴]

گزینه ۱

چون به منطقه ی جواب اشاره کرده، از فرمول نمی توان استفاده کرد و باید منطقه ی موجه را رسم کرد.

$|x_i| \leq ۴$ یعنی $x_i \leq ۴$ و $-x_i \leq ۴$ و از آنجا که گفته است i=۱ , ۲ داریم:

$x_۱ \leq ۴$ و $-x_۱ \leq ۴$ و $x_۲ \leq ۴$ و $-x_۲ \leq ۴$

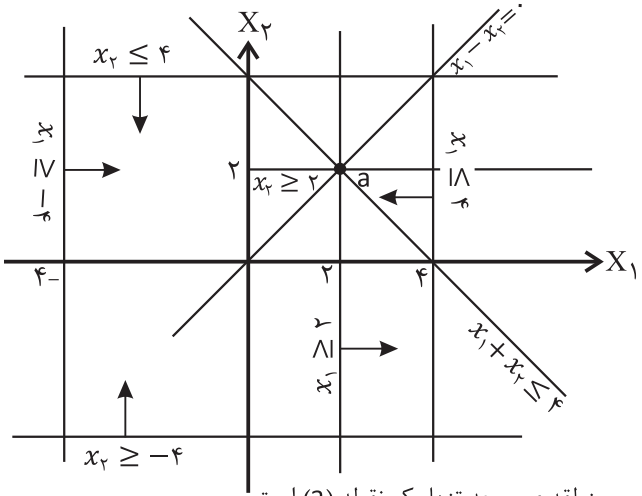
$x_i \leq ۲$ هم یعنی: $x_۱ \geq ۲$ و $x_۲ \geq ۲$

پس در مجموع محدودیت های زیر را داریم، آنها را رسم می کنیم:

(منطقه جواب همان منطقه موجه است، اما فرمول ارائه شده تعداد کل نقاط گوشه -هم موجه و هم غیرموجه- را ارائه می دهد)

(ادامه در فیش بعد)

$$\begin{cases} x_1 \le 4 \\ -x_1 \le 4 \rightarrow (x_1 \ge -4) \\ x_2 \le 4 \\ -x_2 \le 4 \rightarrow (x_2 \ge -4) \\ x_1 \ge 2 \\ x_2 \ge 2 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 \le 4 \end{cases}$$



پس منطقه ی موجه تنها یک نقطه (a) است.

هرگاه مدل دارای چند محدودیت به صورت مساوی باشد، در چه صورتی منطقه موجه وجود دارد و آن منطقه چه شکلی خواهد داشت؟

۱۴ ص ۹۷

به شرطی که همه آنها از یک نقطه بگذرند – منطقه موجه یک نقطه خواهد بود.

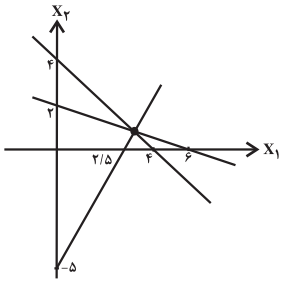
آیا مدل زیر منطقه موجه دارد؟

$$Maxz = x_۱ + ۲x_۲$$

$$st: \begin{cases} ۲x_۱ + ۲x_۲ = ۸ \\ x_۱ + ۳x_۲ = ۶ \\ ۲x_۱ - x_۲ = ۵ \end{cases}$$

$$x_۱, x_۲ \geq ۰$$

راه اول: مدل را رسم می کنیم:



بله، منطقه موجه یک نقطه است.

راه دوم : چون هر سه محدودیت علامت مساوی دارند، منطقه موجه در صورت وجود یک نقطه است، دو محدودیت را با هم قطع داده و جواب حاصله را در محدودیت سوم قرار می دهیم، اگر صدق کرد، هر سه خط از یک نقطه عبور می کنند و منطقه موجه وجود دارد.

$$\begin{cases} ۲x_۱ + ۲x_۲ = ۸ \\ x_۱ + ۳x_۲ = ۶ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ۲x_۱ + ۲x_۲ = ۸ \\ -۲x_۱ - ۶x_۲ = -۱۲ \end{cases} \Longrightarrow -۴x_۲ = -۴ \Longrightarrow x_۲ = ۱ \Longrightarrow x_۱ = ۳$$

$$(۳,۱) \Longrightarrow ۲x_۱ - x_۲ = ۲ \Longrightarrow ۲(۳) - ۱ = ۵$$

پس هر سه محدودیت از نقطه ی (۱ و ۳) = A می گذرند و همان نقطه منطقه موجه و جواب بهینه مدل است .

هر محدودیتی به فرم $ax_1 + bx_2 \geq 0$ ، محدودیتی ..... است.

- ۱۴ ص ۹۹

زائد

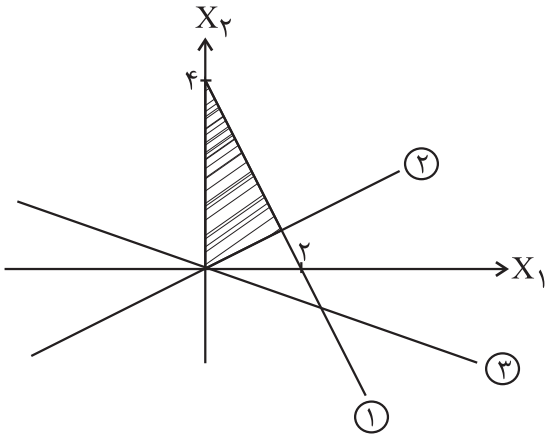
در مدل زیر کدام محدودیت زائد است؟

$$Maxz = x_۱ + ۲x_۲$$

$$st: \begin{cases} ۲x_۱ + x_۲ \leq ۴ \\ -x_۱ + ۲x_۲ \geq ۰ \\ x_۱ + ۳x_۲ \geq ۰ \end{cases}$$

$$x_۱, x_۲ \geq ۰$$

محدودیت سوم زائد است چون به فرم $ax_1 + bx_2 \geq 0$ می باشد، حالت ترسیمی هم به شکل زیر است:



اگر در مسأله ای، یک محدودیت از ترکیب چند محدودیت دیگر به دست آید، آن محدودیت ..... است.

۱۸ ص ۶

زائد

در محدودیت های زیر، کدامیک زائد است؟

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \\ x_1 \leq 4 \\ x_2 \leq -3 \end{cases}$$

۱۸ ص ۶

محدودیت چهارم، از تفریق محدودیت اول و سوم به دست آمده، از این رو زائد است.

$$(x_۱ + x_۲ \leq ۱) - (x_۱ \leq ۴) \rightarrow x_۲ \leq -۳$$

فرضیات مدلهای برنامه ریزی خطی را نام ببرید؟

* این مبحث بصورت کلاسیک باید در ابتدای این فصل قرار می گرفت، اما احتمالاً قرار گرفتن آن در انتهای فصل، آموختنش را ساده تر و ملموس تر خواهد کرد.

۱- فرض تناسب
۲- فرض جمع پذیری
۳- فرض بخش پذیری
۴- فرض معین بودن

* دوستان عزیزم این چهار تا فرض خیلی مهم هستن.

فرض تناسب به چه معناست؟

- ☐
- ☐
- ☐
- ☐
- ☐ ۱ ص ۳۴

بـدین معنـا کـه تـابع هـدف و میـزان مصـرف منـابع دقیقـاً متناسـب بـا هر متغیـر، تغییـر می کنند.

منظور از فرض تناسب چیست؟

۱ ص ۳۴

منظور از فرض تناسب این است که هر فعالیت به تنهایی و مستقل از سایر فعالیت های دیگر عمل می کند.

فرض ..... نشان دهنده ی استقلال فعالیت ها از یکدیگر است.

تناسب

نقــض شــدن فــرض تناســب در مــدل برنامــه ریــزی خطــی باعــث بــه وجــود آمــدن یــک مدل ..... می گردد.

۲ ص ۱۵

غیر خطی

فرض جمع پذیری به چه معناست؟

۱ ص ۳۴

فرض جمع پذیری، یعنی این که **عبارت حاصلضربی** در مدل وجود نخواهد داشت.

با توجه به فرض جمع پذیری، تابع هدف از ..... بدست می آید.

۱ ص ۳۴

مجموع متغیرها

نقض شدن فرض جمع پذیری باعث ..... شدن مدل می گردد.

۲ ص ۱۵

غیرخطی

فرض بخش پذیری به چه معناست؟

۱ ص ۳۴

فرض بخش پذیری به معنی آن است که هر واحد فعالیت به هر کسر دلخواهی قابل تقسیم است لذا متغیرهای تصمیم می توانند مقادیر غیر صحیح نیز باشند.

نقــض شــدن فــرض بخــش پــذیری موجــب بــه وجــود آمــدن یــک مــدل ..... می‌گردد.

۲ ص ۱۵

برنامه ریزی خطی عدد صحیح

(یعنی مقدار متغیرها در جواب مدل فقط اعداد صحیح می توانند باشند)

فرض معین بودن به چه معناست؟

۱ ص ۳۵

فـرض "معـین بـودن" بـدین معنـی اسـت کـه تمـام پارامترهـای مـدل (a_{ij} و b_j و c_j) مقـادیری ثابت و غیر احتمالی هستند.

فرض ..... معمولاً در مسائل واقعی صادق نیست.

۱ ص ۳۵

معین بودن

چرا فرض معین بودن معمولاً در مسائل واقعی صادق نیست؟

۱ ص ۳۵

چون مسائل برنامه ریزی خطی معمولاً برای تصمیم گیری های آتی فرموله می شوند، بنابراین پارامترها براساس پیش بینی آینده تعیین شده و لاجرم جنبه ی احتمالی دارند.

در صورتی که در مسأله ای فرض معین بودن صدق نکند، مدل به مدل ..... تبدیل می شود.

۱۷ ص ۲

احتمالی

مدل زیر مفروض است کدام گزینه صحیح می باشد؟ مدل دارای ..... .

$$MaxZ = ۱۵x_۱ + ۱۲x_۲$$
$$\text{s.t:} \quad \begin{cases} ۵x_۱ + ۴x_۲ \leq ۲۰ \\ x_۱ + x_۲ \geq ۵ \end{cases}$$

۱) بی نهایت جواب است.

۲) جوابهای بهینه چندگانه است.

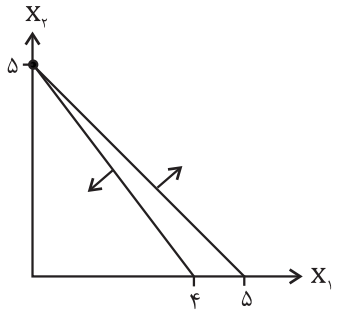
۳) جواب نیست.

۴) حالت تبگهن است.

[سراسری، مدیریت، ۷۶]

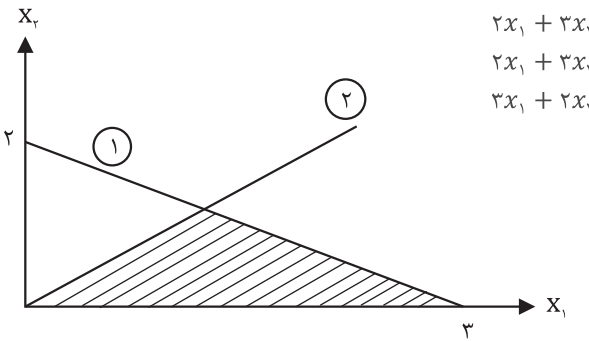
گزینه ۴

مدل را با حالت ترسیمی حل می کنیم:



منطقه موجه و جواب بهینه نقطه $A(۰, ۵)$ است، با توجه به اینکه این نقطه محل عبور بیش از دو خط است، حالت خاص تبگهن وجود دارد.

منطقه موجه شکل زیر به صورت هاشور مشخص شده است. معادلات مربوط کدامند؟



۱) $3x_1 + 2x_2 \leq 6 \ , x_1 = 2x_2$

۲) $2x_1 + 3x_2 \leq 6 \ , 2x_2 = x_1$

۳) $2x_1 + 3x_2 \leq 6 \ , x_1 = 2x_2$

۴) $3x_1 + 2x_2 \leq 6 \ , 2x_2 = x_1$

[سراسری، مدیریت، ۷۶]

هیچ کدام

در هر چهار گزینه محدودیتی با علامت مساوی وجود دارد که با منطقه موجه در شکل همخوانی ندارد، به هر حال معادلات مربوطه عبارتند از:

$$\begin{cases} ۲x_۱ + ۳x_۲ \leq ۶ \\ -x_۱ + ۲x_۲ \leq ۰ \end{cases}$$
$$x_۱ , x_۲ \geq ۰$$

مسأله برنامه ریزی خطی زیر دارای منطقه موجهی بصورت:

$$
\begin{aligned}
Max Z &= ۷x_۱ + ۸x_۲ \\
x_۱ + ۳x_۲ &\leq ۹ \\
۲x_۱ + x_۲ &= ۶ \\
x_۱ + ۳x_۲ &\geq ۹ \\
x_۱, x_۲ &\geq ۰
\end{aligned}
$$

۱) فاقد منطقه موجه است.

۲) یک چند ضلعی است.

۳) یک خط است.

۴) یک نقطه است.

[سراسری، مدیریت، ۷۶]

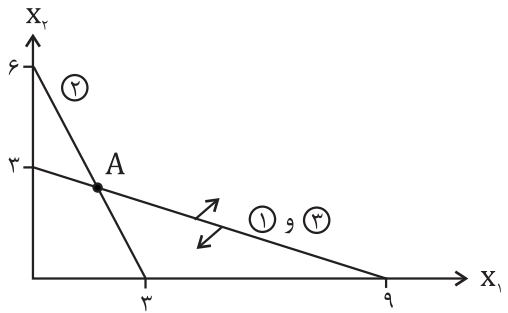
گزینه ۴

منطقه موجه را رسم می کنیم:

منطقه موجه نقطه A است.

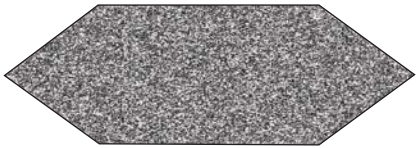
وجود محدودیت اول و سوم مانند

اینست که بگوئیم $(x_۱ + ۳x_۲ = ۹)$



تابع هدف و منطقه موجه یک مدل LP به صورت زیر است. در چه شرایطی جواب بهینه به ازاء نقاط گوشه و نقاط درونی، جوابی یکسان می دهد؟

تابع هدف منطقه موجه $Maxz = c_۱x_۱ + c_۲x_۲$



۱) $C_۱ = C_۲ = ۰$

۲) $C_۱ = ۲, C_۲ = ۳$

۳) $C_۱ = ۰, C_۲ = ۳$

۴) $C_۱ = -۲ , C_۲ = -۳$

[سراسری، مدیریت، ۸۲]

گزینه ۱

فقط در اینصورت است که جواب بهینه به ازاء نقاط گوشه و نقاط درونی جواب یکسانی را ارائه می دهد.

در یک مسأله LP با تغییر تابع هدف از Max به Min مقدار تابع هدف تغییر نکرده است در این صورت:

۱) منطقه موجه نامحدود می باشد.

۲) منطقه موجه حتماً یک خط می باشد.

۳) منطقه موجه یک نقطه و یا می تواند یک خط باشد.

۴) منطقه موجه یک نقطه می باشد.

[سراسری، مدیریت،۸۲]

گزینه ۳

همین دیگه!

در یک کارگاه یک کارگر در طول هر دوره زمانی، ۲۰۰ ساعت وقت در اختیار دارد که می تواند از وقت خود برای تولید دو محصول A و B استفاده کند. تولید هر واحد محصول A چهار برابر وقت تولید هر واحد محصول B است و سود هر واحد محصول B یک چهارم سود هر واحد محصول A می باشد. ماکزیمم سود حاصل برای این کارگر در دوره زمانی ۲۰۰ ساعت، ده هزار تومان است. سود هر واحد محصول A چند تومان است؟

۱) ۱۰۰

۲) ۲۰۰

۳) ۲۵۰

۴) ۴۰۰

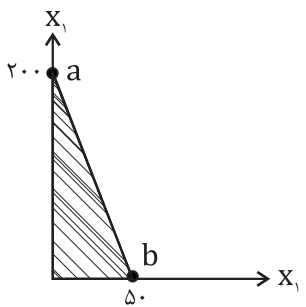
[سراسری، مدیریت، ۸۵]

گزینه ۲

چون تابع هدف با محدودیت موازی است، هر دو نقطه a , b بهینه اند و داریم:

$$Max\ Z = C_A X_A + \frac{۱}{۴} C_A X_B$$

$$۴X_A + X_B \leq ۲۰۰$$



$$Max\ Z = C_۱ X_۱ + \frac{۱}{۴} C_۱ X_۲ = ۱۰,۰۰۰$$

$$\Longrightarrow ۵۰ C_۱ + ۰ = ۱۰,۰۰۰$$

$$\Longrightarrow C_۱ = ۲۰۰$$

حداکثر سود برای مساله روبرو کدام است؟

$$\text{MaxZ} = -۲x_۱ + x_۲$$

$$s.t. \begin{cases} |x_۱ - x_۲| \leq ۱ \\ x_۱, x_۲ \geq ۰ \end{cases}$$

۱) ۴-
۲) صفر
۳) یک
۴) بی نهایت

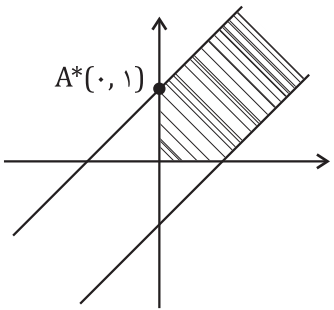
[سراسری، مدیریت، ۸۷]

مسأله را به روش ترسیمی حل می کنیم:

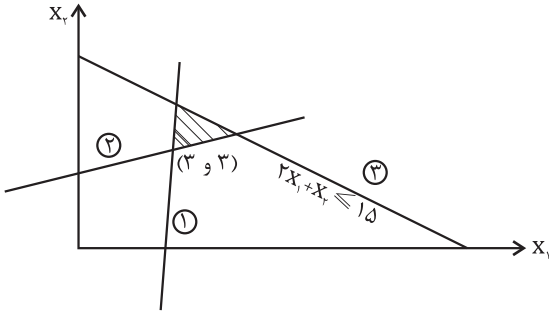
$$Max\ Z = -۲x_۱ + x_۲$$
$$\{|x_۱ - x_۲| \leq ۱$$
$$x_۱ , x_۲ \geq ۰$$

$$\Longrightarrow$$

$$Max\ Z = -۲x_۱ + x_۲$$
$$\begin{cases} x_۱ - x_۲ \leq ۱ \\ x_۱ - x_۲ \geq -۱ \end{cases}$$
$$x_۱ , x_۲ \geq ۰$$



با توجه به شکل، تغییر محدودیت سوم ($۲x_۱ + x_۲ \leq ۱۵$) به کدام صورت زیر مسأله را به حالت خاص تبهگن (تباهیده، Degenerate) و منطقه موجه نامحدود تبدیل می کند؟



۱) $۲x_۱ + x_۲ \leq ۹$

۲) $۲x_۱ + x_۲ \geq ۹$

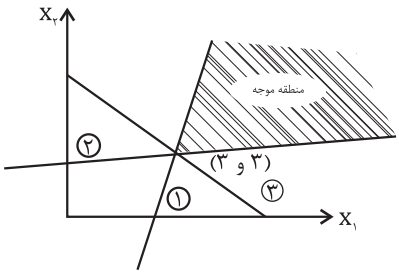
۳) $۲x_۱ + x_۲ \geq ۱۵$

۴) $۲x_۱ + x_۲ = ۹$

[سراسری، مدیریت، ۹۱]

گزینه ۲

حالت تبهگن زمانی رخ می دهد که یک نقطه محل عبور بیش از ۲ معادله خطی باشد. با تغییر عدد سمت راست محدودیت سوم به ۹ این معادله از نقطه (۳ و ۳) عبور خواهد کرد، همچنین اگر علامت این محدودیت بزرگتر مساوی باشد، منطقه موجه نیز نامحدود خواهد بود:



مقدار بهینه تابع هدف (Z^*) مسأله زیر معادل ۱۸ و فقط بر روی معادله حدی محدودیت اول قرار دارد. عدد سمت راست محدودیت دوم ($b_۲$)، کدام است؟

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= ۳x_۱ + ۱۵x_۲ \\ \text{s.t.} \quad & ۲x_۱ + ۴x_۲ \geq ۱۲ \\ & ۵x_۱ + ۲x_۲ \geq b_۲ \\ & x_۱, x_۲ \geq ۰ \end{aligned}$$

۱) ۱۰

۲) ۴۰

۳) ۳۵

۴) ۶۰

[سراسری، مدیریت، ۹۱]

گزینه ۱

محدودیت اول و تابع هدف را رسم می کنیم. بدون در نظر گرفتن محدودیت دوم، نقطه ی (۳ , ۰) جواب بهینه است، اما چون گفته جواب بهینه فقط بر روی معادله حدی محدودیت اول قرار دارد و $Z^* = ۱۸$ و با توجه به ضرایب تابع هدف، در نتیجه جواب بهینه همان نقطه (۶,۰) است، پس مقدار $b_۲$ باید به اندازه ای باشد که نقطه (۰,۳) در منطقه موجه قرار نگیرد و (۶ , ۰) در منطقه موجه قرار گیرد، با جایگذاری این دو نقطه در محدودیت دوم داریم:

$$\begin{cases} ۵x_۱ + ۲x_۲ \xrightarrow{(۰,۳)} b_۲ = ۶ \\ ۵x_۱ + ۲x_۲ \xrightarrow{(۶,۰)} b_۲ = ۳۰ \end{cases} \Rightarrow ۶ \leq b_۲ \leq ۳۰$$

سخن پایان فصل

روش ترسیمی برای حل مسائل دو متغیره برنامه ریزی خطی به کار می رود. مطالب این فصل یکی از پایه های اساسی یادگیری مطالب سایر فصول است. سعی کنید هم اکنون به مدت چند دقیقه شکل هایی از مدلهای ترسیمی را در ذهن خود ترسیم کنید و جهت حرکت تابع هدف و حالت های خاص را در آنها مرور نمائید.

فهرست

۱- مدلسازی ریاضی ۱
۲- روش سیمپلکس ۷
۳- تابع هدف ***Min*** سازی ۱۹
۴- روش ***M*** بزرگ ۲۲
۵- روش دو مرحله‌ای(دو فاز) ۲۸
۶- مساله با متغیرهای آزاد در علامت ۳۴
۷- مدل ثانویه ۴۰
۸- الگوریتم سیمپلکس ثانویه ۴۴
۹- تحلیل حساسیت ترسیمی اعداد سمت راست ۴۷
۱۰- تحلیل حساسیت ترسیمی ضرایب تابع هدف ۵۴
۱۱- برنامه‌ریزی پارامتری برای ضرایب تابع هدف ۵۶
۱۲- برنامه‌ریزی پارامتری اعداد سمت راست ۵۹
۱۳- الگوریتم سیمپلکس تجدید نظر شده ۶۱
۱۴- فن حد فوقانی ۶۵
۱۵- الگوریتم محدودیت مصنوعی ۷۲
۱۶- الگوریتم اولیه – ثانویه ۷۵
۱۷- مثال پایان فصل هفتم ۷۹
۱۸- روش گوشه شمال غربی ۸۲
۱۹- روش حداقل سطر ۸۵
۲۰- روش حداقل هزینه ۸۷
۲۱- روش تخمین وگل ۸۸
۲۲- روش پله‌سنگ ۹۰
۲۳- روش توزیع تعدیل‌شده ۹۶
۲۴- روش مجارستانی ۱۰۱
۲۵- روش جدولی ۱۰۷
۲۶- روش نشانه‌گذاری ۱۱۱
۲۷- الگوریتم حداکثر جریان ۱۱۷
۲۸- روش برش ۱۲۱

فهرست

۲۹- حداقل درخت دربرگیرنده ۱۲۳
۳۰- الگوریتم انشعاب و تحدید ۱۲۷
۳۱- الگوریتم برش اولیه تماماً عدد صحیح ۱۳۵
۳۲- الگوریتم صفحات برش برای مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط ۱۳۷
۳۳- الگوریتم شمارش ضمنی (بالاس) ۱۳۹
۳۴- بازی‌های دو نفره با مجموع صفر و بی‌ثبات ۲×۲ ..... ۱۵۱
۳۵- بازی‌های دو نفره با مجموع صفر و بی‌ثبات m×۲ یا ۲×n ۱۵۴
۳۶- برنامه‌ریزی پویا ۱۵۷
۳۷- برنامه‌ریزی آرمانی ۱۶۱

۱- مدلسازی ریاضی

مثال ۱)

مسأله زیر را مدلسازی کنید؟

یک کارگاه تزریق پلاستیک، آبکش و کاسه پلاستیکی تولید می کند. روزانه حداکثر ۵۰ کیلوگرم ماده اولیه تولید در دسترس است و امکان دستیابی به میزانی بیش از این مقدار وجود ندارد. این کارگاه دو کارگر دارد که هر یک روزانه ۸ ساعت کار می کنند. از هر ظرف چند تا تولید کنیم تا سود حداکثر شود؟

سایر اطلاعات تولیدی به شرح زیر هستند:

	میزان مصرف ماده اولیه (گرم)	زمان لازم برای تولید هر واحد (دقیقه)	سود هر واحد تولید شده
آبکش	۱۰۰	۱۰	۱۸
کاسه	۱۸۰	۷	۱۲

متغیرهای تصمیم:

ابتدا صورت سوال را چند بار به دقت بخوانید. همانطور که از صورت سوال پیداست، ما باید در مورد تعداد تولید هر کدام از دو محصول تصمیم بگیریم.پس متغیرهای تصمیم مسأله به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 : \text{تعداد تولید آبکش} \\ x_2 : \text{تعداد تولید کاسه} \end{array}\right\}$$

تابع هدف:

هدف مسأله نیز (مطابق با صورت سوال)، حداکثر کردن سود می باشد. سود هر کدام از دو محصول نیز در جدول داده شده است. تابع هدف بصورت زیر نوشته می شود:

$$\text{Max } Z = 18x_1 + 12x_2$$

توضیح بیشتر در مورد تابع هدف:

Max Z : یعنی حداکثر کردن تابع

$18x_1$: عدد ۱۸ سود حاصل از تولید هر آبکش است و متغیر x_1 بیانگر تعداد تولید آبکش است (که هنوز تعداد آن مشخص

$۱۲x_۲$: عدد ۱۲ سود تولید هر کاسه است و متغیر $x_۲$ بیانگر تعداد تولید کاسه است.

سود کل ما برابر است با:

Max Z=(تعداد آبکش تولید شده × سود تولید هر واحد آبکش)+(تعداد کاسه تولید شده × سود تولید هر واحد کاسه)

محدودیت ها:

در این مسأله، برای تولید، از دو منبع نیروی انسانی و ماده اولیه استفاده می شود که مقدار هر دو آنها محدود است. پس محدودیت هایی به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$۱۰۰x_۱ + ۱۸۰x_۲ \leq ۵۰,۰۰۰$$

توضیح بیشتر محدودیت اول:

$۱۰۰x_۱$: عدد ۱۰۰ بیانگر میزان مصرف ماده اولیه برای تولید آبکش است و متغیر $x_۱$، تعداد تولید آبکش را نشان می دهد.

$۱۸۰x_۲$: عدد ۱۸۰ بیانگر میزان مصرف ماده اولیه برای تولید کاسه است و متغیر $x_۲$، تعداد تولید کاسه را نشان می دهد.

$\leq$: عبارت $۱۰۰x_۱+۱۸۰x_۲$ بیانگر کل مصرف ماده اولیه برای هر دو کالا در سطوح مختلف تولید $(x_۱,x_۲)$ است، این مقدار باید کوچکتر یا مساوی میزان ماده اولیه موجود در هر روز باشد.

۵۰،۰۰۰ : مقدار کل ماده اولیه ای که روزانه در دسترس است. توجه داشته باشید که چون ضرایب متغیرها بر حسب گرم داده شده، عدد ۵۰ را نیز در ۱۰۰۰ ضرب می کنیم تا واحد آن از کیلو به گرم تغییر یابد.

محدودیت دوم مربوط به زمان در دسترس است و به صورت زیر تعریف می شود:

$$۱۰x_۱ + ۷x_۲ \leq ۹۶۰$$

عدد ۹۶۰ کل زمان در دسترس روزانه است (چون دو کارگر داریم، هر کدام ۸ ساعت کار می کنند، و هر ساعت ۶۰ دقیقه است، در نتیجه ۹۶۰=۶۰×۸×۲)

وضعیت متغیرها:

متغیر $x_۱$ و $x_۲$ بیانگر تعداد تولید آبکش و کاسه هستند، میزان تولید نمی تواند منفی باشد، در نتیجه قیود زیر نیز برای مسأله تعریف می شوند:

$$x_۱, x_۲ \geq ۰$$

پس مدل بصورت زیر است:

$$\text{Max } Z = ۱۸x_۱ + ۱۲x_۲$$

$$st: \begin{cases} ۱۰۰x_۱ + ۱۸۰x_۲ \le ۵۰,۰۰۰ \\ ۱۰x_۱ + ۷x_۲ \le ۹۶۰ \end{cases}$$

$$x_۱, x_۲ \ge ۰$$

$x_۱$: تعداد تولید آبکش

$x_۲$: تعداد تولید کاسه

(st ، مخفف کلمه "Subject to" به معنی «در رابطه با» می باشد)

مثال۲: مساله زیر را مدلسازی کنید.

یک کارگاه،توانایی تراشکاری سه قطعه را توسط چهار نوع ماشین تراش داراست. زمان تولید (بر حسب دقیقه) توسط ماشین آلات مختلف بصورت زیر می باشد:

ماشین تراش / قطعات	۱	۲	۳	۴
۱	۵	۷	۴	۱۰
۲	۶	۱۲	۸	۱۵
۳	۱۳	۱۴	۹	۱۷

از آنجاییکه زمان تولید یک قطعه توسط ماشین های تراش مختلف متفاوت است،سود هر قطعه تولید نیز بر حسب اینکه از کدام ماشین تراش برای تولید آن استفاده می شود،متفاوت خواهد بود.جدول زیر سود هر واحد محصول را نشان می دهد:

ماشین تراش / قطعات	۱	۲	۳	۴
۱	۱۰	۸	۶	۹
۲	۱۸	۲۰	۱۵	۱۷
۳	۱۵	۱۶	۱۳	۱۷

در صورتیکه میزان کار در هفته (برای هر ماشین) ۴۴ ساعت در نظر گرفته شود و حداقل میزان تولید سه قطعه ۱۰۰و۱۵۰و۱۰۰ عدد باشد،از هر قطعه توسط چه ماشینی و به چه تعداد باید تولید گردد تا سود کارگاه حداکثر شود؟ این مسأله را مدلسازی کنید.

(این مثال از منبع شماره ۱۰ آورده شده است.)

پاسخ:

در این مسأله در پی حداکثر سازی سود هستیم، سود هر قطعه، بر حسب اینکه توسط کدام ماشین تولید شده باشد متفاوت است.

آیا ما در پی تصمیم گیری در مورد میزان تولید هر کدام از سه قطعه هستیم؟ در اینصورت سود مربوط به هر قطعه چقدر است؟ (خیر، چنین نیست!)

آیا ما در پی تصمیم گیری در مورد میزان تولید هر ماشین هستیم؟ در اینصورت نوع قطعه چه اهمیتی دارد؟ (خیر، چنین هم نیست!)

متغیرهای تصمیم:

ما میخواهیم بدانیم از هر قطعه به چه تعداد، و توسط کدام ماشین ها تولید شود، در اینصورت متغیرهای تصمیم ما به شکل X_{ij} هستند که در آنها:

x = تعداد تولید

i = شماره قطعه(۱،۲،۳)

j = شماره ماشین (۱،۲،۳،۴)

پس X_{ij} یعنی تعداد تولید قطعه iام توسط ماشین jام. متغیرها عبارتند از :

$x_{۱۱}$ تعداد تولید قطعه شماره ۱ توسط ماشین اول:

$x_{۱۲}$ تعداد تولید قطعه شماره ۱ توسط ماشین دوم:

$x_{۱۳}$ تعداد تولید قطعه شماره ۱ توسط ماشین سوم:

$x_{۱۴}$ تعداد تولید قطعه شماره ۱ توسط ماشین چهارم:

$x_{۲۱}$ تعداد تولید قطعه شماره ۲ توسط ماشین اول:

$x_{۲۲}$ تعداد تولید قطعه شماره ۲ توسط ماشین دوم:

$x_{۲۳}$ تعداد تولید قطعه شماره ۲ توسط ماشین سوم:

$x_{۲۴}$ تعداد تولید قطعه شماره ۲ توسط ماشین چهارم:

$x_{۳۱}$ تعداد تولید قطعه شماره ۳ توسط ماشین اول:

$x_{۳۲}$ تعداد تولید قطعه شماره ۳ توسط ماشین دوم:

$x_{۳۳}$ تعداد تولید قطعه شماره ۳ توسط ماشین سوم:

$x_{۳۴}$ تعداد تولید قطعه شماره ۳ توسط ماشین چهارم:

تابع هدف:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z = & ۱۰x_{۱۱} + ۸x_{۱۲} + ۶x_{۱۳} + ۹x_{۱۴} \\ & + ۱۸x_{۲۱} + ۲۰x_{۲۲} + ۱۵x_{۲۳} + ۱۷x_{۲۴} \\ & + ۱۵x_{۳۱} + ۱۶x_{۳۲} + ۱۳x_{۳۳} + ۱۷x_{۳۴} \end{aligned}$$

بدیهی است که برای نوشتن تابع هدف از جدول دوم استفاده شده است.

محدودیت ها:

محدودیتی برای ساعات کار هفتگی ماشین آلات وجود دارد که بصورت زیر تعریف می شود:

محدودیت ساعت کار برای ماشین اول:

$$۵x_{۱۱} + ۶x_{۲۱} + ۱۳x_{۳۱} \leq ۴۴ \times ۶۰$$

محدودیت ساعت کار برای ماشین دوم:

$$۷x_{۱۲} + ۱۲x_{۲۲} + ۱۴x_{۳۲} \leq ۴۴ \times ۶۰$$

محدودیت ساعت کار برای ماشین سوم:

$$۴x_{۱۳} + ۸x_{۲۳} + ۹x_{۳۳} \leq ۴۴ \times ۶۰$$

محدودیت ساعت کار برای ماشین چهارم:

$$۱۰x_{۱۴} + ۱۵x_{۲۴} + ۱۷x_{۳۴} \leq ۴۴ \times ۶۰$$

(توجه کنید که هر محدودیت در مورد زمان در دسترس هر ماشین نوشته شده، به متغیرها و اندیس آنها دقت کنید)

محدودیت هایی نیز برای تعداد تولید هر قطعه وجود دارد و خواسته شده از حد معینی کمتر نباشند، در نتیجه داریم:

محدودیت تعداد تولید محصول اول: $x_{۱۱} + x_{۱۲} + x_{۱۳} + x_{۱۴} \geq ۱۰۰$

محدودیت تعداد تولید محصول دوم: $x_{۲۱} + x_{۲۲} + x_{۲۳} + x_{۲۴} \geq ۱۵۰$

محدودیت تعداد تولید محصول سوم: $x_{۳۱} + x_{۳۲} + x_{۳۳} + x_{۳۴} \geq ۱۰۰$

توجه کنید که در محدودیت های میزان تولید، متغیرها هیچ ضریبی ندارند، چون در این محدودیت ها تعداد تولید هر محصول مدنظر ماست

(به متغیرها و اندیس آنها دقت کنید و این محدودیت ها را، با محدودیت های ساعات کار برای ماشین ها مقایسه کنید)

وضعیت متغیرها:

چون تعداد تولید نمی تواند منفی باشد، پس تمامی متغیرها باید بزرگتر یا مساوی صفر باشند. این قید را بصورت ریاضی می توان به شکل زیر تعریف کرد:

$$x_{ij} \geq ۰ \quad , i = (۱,۲,۳) \ , j = (۱,۲,۳,۴)$$

مدل بصورت کلی به شکل زیر است:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z = & ۱۰x_{۱۱} + ۸x_{۱۲} + ۶x_{۱۳} + ۹x_{۱۴} + ۱۸x_{۲۱} + ۲۰x_{۲۲} + ۱۵x_{۲۳} + ۱۷x_{۲۴} \\ & + ۱۵x_{۳۱} + ۱۶x_{۳۲} + ۱۳x_{۳۳} + ۱۷x_{۳۴} \end{aligned}$$

$$\text{st}: \begin{cases} ۵x_{۱۱} + ۶x_{۲۱} + ۱۳x_{۳۱} \leq ۲۶۴۰ \\ ۵x_{۷} + ۶x_{۱۲} + ۱۳x_{۱۴} \leq ۲۶۴۰ \\ ۵x_{۴} + ۶x_{۸} + ۱۳x_{۹} \leq ۲۶۴۰ \\ ۵x_{۱۰} + ۶x_{۱۵} + ۱۳x_{۱۷} \leq ۲۶۴۰ \\ x_{۱۱} + x_{۱۲} + x_{۱۳} + x_{۱۴} \geq ۱۰۰ \\ x_{۲۱} + x_{۲۲} + x_{۲۳} + x_{۲۴} \geq ۱۵۰ \\ x_{۳۱} + x_{۳۲} + x_{۳۳} + x_{۳۴} \geq ۱۰۰ \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq ۰ \quad , i = (۱,۲,۳) \ , \ j = (۱,۲,۳,۴)$$

۲- روش سیمپلکس

برای حل هرمدل توسط روش سیمپلکس، ابتدا آنرا استاندارد می نمائیم. استاندارد بودن مفهومی قراردادی است و در منابع مختلف، شرایط مختلفی را برای آن ذکر کرده اند، در این نوشتار منظور از مدل استاندارد مدلی است که دارای شرایط زیر باشد:

۱)تابع هدف مسأله بصورت Max باشد.

(اگر Min بود، آنرا در یک منفی ضرب می کنیم تا Max شود)

۲)تمامی محدودیت ها بصورت «کوچکتر مساوی» هستند.

(برای محدودیت های با علامت «مساوی» و «بزرگتر مساوی» از روشهای Big M و دو فاز می توان استفاده کرد که توضیح آنها ارائه خواهد شد)

۳)همگی متغیرها غیرمنفی هستند $(x_j \geq ۰ \quad , \quad j = ۰,۱,\ldots,n)$

(برای متغیرهای آزاد در علامت، توضیحات لازم ارائه خواهد گردید)

جدول سیمپلکس ، عمدتاً بصورت زیر میباشد:

حداکثرها	اعداد سمت راست (R.H.S)	(تمامی متغیرها) $Z \quad x_۱ \; x_۲ \ldots x_n \quad s_۱ \; s_۲ \ldots s_m$	شماره سطر	متغیرهای اساسی
	مقدار جواب	محل قرار گرفتن ضرایب متغیرها در تابع هدف	۰	Z
این ستون برای تعیین متغیر خروجی است	مقدار جواب مسأله (مقدار هر متغیر اساسی)	محل قرار گرفتن ضرایب متغیرها در معادلات	۱ ۲ . . n	محل قرار گرفتن متغیرهای اساسی (n متغیر اساسی)

البته فرمها و مدلهای دیگری نیز برای سیمپلکس مورد استفاده قرار می گیرد که ساختار اصلی آنها یکسان است و تقریباً اطلاعات مشابهی را ارائه می کنند.

شکل ساده شده ی جدول قبل را می توان بصورت زیر در نظر گرفت:

اعداد سمت راست	$x_۱ \ldots\ldots x_n \quad s_۱ \ldots\ldots s_m$	
مقدار جواب		Z
جواب مسأله	ضرایب متغیرها	متغیرهای اساسی

آماده کردن یک مدل جهت ورود به جدول سیمپلکس (برای مسائل استاندارد)

آماده کردن تابع هدف: تمامی عناصر تابع هدف مدل را به سمت چپ آن منتقل می نمائیم.

آماده کردن محدودیت ها: یک متغیر برابر ساز به سمت چپ هر محدودیت اضافه می‌کنیم تا نامعادله محدودیت‌ها به معادله تبدیل شود.

(این متغیرهای برابرساز در اولین جدول، بعنوان متغیرهای اساسی در نظر گرفته می شوند)

گامهای حل یک مسأله فرم استاندارد بصورت زیر است:

گام ۱- آماده کردن مدل و وارد کردن آن به جدول

گام۲- انتخاب متغیر ورودی: منفی ترین عدد در سطر تابع هدف (سطر Z یا سطر شماره صفر) را انتخاب کنید و ستون زیر آنرا ستون لولا بنامید، متغیر مربوط به این ستون، متغیر ورودی نامیده می شود.

گام ۳-انتخاب متغیر خروجی: هر عدد سمت راست را بر عدد مثبت ستون لولا (در سطر خودش) تقسیم و کوچکترین عدد حاصل را انتخاب کنید. سطر مربوط به آن را سطر لولا نامیده و متغیر اساسی مربوط به آن سطر را متغیر خروجی بنامید.

گام ۴- یافتن جواب اساسی جدید: در این قدم، جدول جدید سیمپلکس محاسبه می شود. برای محاسبه سطرهای جدول جدید از روابط زیر استفاده می شود:

$$\text{سطر لولای جدید (سطری که به جای سطر لولای قدیم می آید)} = \frac{\text{سطر لولای قدیم}}{\text{عدد لولا}}$$

سایر سطور به جز سطر لولای جدید بصورت زیر بدست می آیند :

عدد متناظر با عدد لولا در جدول جدید باید دارای مقدار ۱ باشد که از رابطه ی بالا بدست آمد، اعداد متناظر با ستون لولا در جدول جدید (بغیر از عدد لولا) باید دارای مقدار صفر باشند، از اینرو سطر متناظر با سطر لولا در جدول جدید را در اعداد مثبت یا منفی (با توجه به دیگر اعداد ستون لولا) ضرب می کنیم و با هر سطر جدول قبلی جمع می کنیم و در جدول جدید می نویسیم، در این حال ، تمامی اعداد ستون جدید متناظر با ستون لولا دارای مقدار صفر می باشند، به استثنای عدد متناظر با عدد لولا که دارای مقدار ۱ است.

(این موضوع به تفصیل در مثال توضیح داده خواهد شد)

گام ۵- به گام دوم بروید و در صورت غیر منفی بودن تمام اعداد سطر صفر توقف کنید.

ساختار کلی الگوریتم سیمپلکس

بصورت کلی می توان گفت ساختار الگوریتم سیمپلکس در مقایسه با حالت ترسیمی‌شامل قدم ابتدایی، قدم های تکراری و دستور توقف است که به شکل زیر است:

قدم ابتدایی: از یک نقطه گوشه ی موجه ابتدایی شروع کنید.

قدم تکراری: به یک نقطه گوشه موجه مجاور بهتر بروید.

دستور توقف: اگر یک نقطه ی گوشه ی موجه، از نقاط گوشه موجه مجاورش بهتر باشد، آن نقطه بهینه است و باید توقف کرد.

مثال: مدل استاندارد زیر را با روش سیمپلکس حل می کنیم و بصورت همزمان توضیح لازم و کافی را ارائه می نمائیم. همچنین جهت درک بهتر، هر کدام از جداول سیمپلکس با وضعیت مدل ترسیمی هم مقایسه شده است.

$$\text{Max } Z = ۲x_۱ + ۳x_۲$$

$$st: \begin{cases} ۲x_۱ + x_۲ \le ۶ \\ ۲x_۱ + ۲x_۲ \le ۸ \\ \qquad ۲x_۲ \le ۶ \end{cases}$$

$$x_۱, x_۲ \ge ۰$$

تکرار صفر- گام اول

ابتدا مدل را جهت ورود به جدول سیمپلکس آماده می کنیم، یعنی اینکه متغیرهای تابع هدف را به سمت چپ علامت مساوی انتقال داده و نامعادلات محدودیت ها را نیز تبدیل به معادله می کنیم:

$$Max\, Z - ۲x_۱ - ۳x_۲$$

$$st: \begin{cases} ۲x_۱ + x_۲ + s_۱ = ۶ \\ ۲x_۱ + ۲x_۲ + s_۲ = ۸ \\ \qquad ۲x_۲ + s_۳ = ۶ \end{cases}$$

$$x_۱, x_۲, s_۱, s_۲, s_۳ \ge ۰$$

مدل را وارد جدول سیمپلکس می کنیم:

	شماره سطر	$X_۱$	$X_۲$	$S_۱$	$S_۲$	$S_۳$	R.H.S
Z	۰	-۲	-۳	۰	۰	۰	۰
$S_۱$	۱	۲	۱	۱	۰	۰	۶
$S_۲$	۲	۲	۲	۰	۱	۰	۸
$S_۳$	۳	۰	۲	۰	۰	۱	۶

(هر سطر جدول بیانگر یک متغیر اساسی است و میدانیم که تعداد متغیرهای اساسی با تعداد محدودیت های مسأله برابر است)

تکرار صفر- گام ۲ (انتخاب متغیر ورودی)

در سطر صفر، منفی ترین عدد، ۳- است که مربوط به متغیر $x_۲$ است، دور این ستون را خط می کشیم و آنرا ستون لولا می نامیم. متغیر مربوط به این ستون ($x_۲$) متغیر ورودی است.

ستون لولا

	شماره سطر	$X_۱$	$X_۲$	$S_۱$	$S_۲$	$S_۳$	R.H.S
Z	۰	-۲	-۳	۰	۰	۰	۰
$S_۱$	۱	۲	۱	۱	۰	۰	۶
$S_۲$	۲	۲	۲	۰	۱	۰	۸
$S_۳$	۳	۰	۲	۰	۰	۱	۶

تکرار صفر- گام ۳ (انتخاب متغیر خروجی)

هر عدد موجود در ستون سمت راست (R.H.S) را بر عدد هم سطری اش در ستون لولا تقسیم کرده و حاصل آنرا در آخرین ستون می‌نویسیم. کوچکترین عدد حاصله را انتخاب می کنیم و سطر مربوط به آن عدد را سطر لولا می نامیم. متغیر مربوط به این سطر، متغیر خروجی است. مشاهده می کنیم که کوچکترین عدد حاصله ۳ است و از اینرو متغیر $S_۳$ بعنوان متغیر خروجی انتخاب می شود:

ستون لولا

	شماره سطر	$X_۱$	$X_۲$	$S_۱$	$S_۲$	$S_۳$	R.H.S	
Z	۰	-۲	-۳	۰	۰	۰	۰	
$S_۱$	۱	۲	۱	۱	۰	۰	۶	$\frac{۶}{۱}=۶$
$S_۲$	۲	۲	۲	۰	۱	۰	۸	$\frac{۸}{۲}=۴$
$S_۳$	۳	۰	۲	۰	۰	۱	۶	$\frac{۶}{۲}=۳$

سطر لولا

عدد لولا(۲)

عددی که بصورت همزمان در سطر و ستون لولا قرار دارد نیز عدد لولا نامیده می شود.

تکرار صفر - گام ۴

یک جدول جدید رسم می نمائیم.

ابتدا متغیر ورودی را به جای متغیر خروجی می نویسیم (در ستون متغیرهای اساسی) و سپس برای محاسبه ی سطرهای جدول جدید، سطر لولا را بر عدد لولا تقسیم می کنیم و در سطر متناظرش در جدول جدید می نویسیم:

	شماره سطر	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R.H.S
Z	۰						
S_1	۱						
S_2	۲						
x_2	۳	۰	۱	۰	۰	$\frac{۱}{۲}$	۳

$\frac{۲}{۲}=۱$ $\quad$ $\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}$ $\quad$ $\frac{۶}{۲}=۳$ $\quad$ $\frac{۰}{۲}=۰$

می دانیم که هر متغیر اساسی در سطر خودش باید دارای ضریب ۱ و در مابقی سطرها دارای ضریب ۰ باشد (همه ی Sهای تکرار صفر هم چنین بودند). در جدول جدید (تکرار ۱)، متغیر x_2 اساسی شده است، در گام چهارم که در بالا مشاهده می فرمائید، ضرایب سطر x_2 محاسبه شد و ضریب متغیر x_2 در سطر خودش ۱ شد، حال باید بقیه ی اعداد طوری محاسبه شوند که ضریب x_2 در دیگر سطرها صفر شود تا شرط لازم برای اساسی بودن این متغیر تحقق یابد. ادامه گام ۴ به این مهم می پردازد.

برای محاسبه ی اعداد سطرهای دیگر، با توجه به شرط زیر عمل می کنیم:

«هر متغیر اساسی در سطر خودش باید دارای ضریب ۱ و در مابقی سطرها دارای ضریب ۰ باشد »

پس برای متغیر اساسی جدید (x_2)، در سطر مربوطه اش، ضریب ۱ و در مابقی سطرها (بغیر از سطر خودش که محاسبه شد) صفر میگذاریم. و برمبنای آن مابقی محاسبات را انجام می دهیم، یعنی:

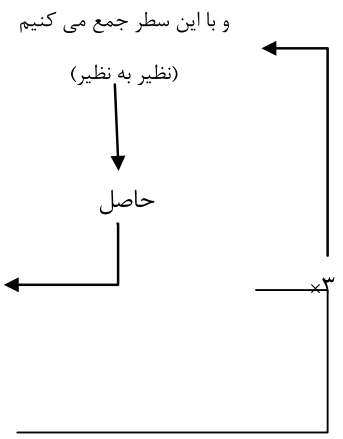
	شماره سطر	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R.H.S
Z	۰		۰				
S_1	۱		۰				
S_2	۲		۰				
x_2	۳	۰	۱	۰	۰	$\frac{۱}{۲}$	۳

تمام محاسبات ما تا اینجا به قرار زیر است:

	شماره سطر	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R.H.S	
Z	۰	-۲	-۳	۰	۰	۰	۰	
S_1	۱	۲	۱	۱	۰	۰	۶	
S_2	۲	۲	۲	۰	۱	۰	۸	تکرار صفر
S_3	۳	۰	۲	۰	۰	۱	۶	
Z	۰		۰					
S_1	۱		۰					
S_2	۲		۰					تکرار یک
x_2	۳	۰	۱	۰	۰	$\frac{۱}{۲}$	۳	

برای محاسبه ی سطر ۰ تکرار ۱ باید سطر سوم تکرار ۱ را در عدد مناسبی ضرب کنیم و با سطر صفر تکرار صفر جمع کنیم ، به قسمی که ضریب x_2 آن سطر در تکرار ۱ صفر شود. با توجه به اینکه ضریب x_2 در سطر صفر تکرار صفر، ۳- می باشد، سطرسوم تکرار ۱ را در عدد ۳ ضرب کرده و با سطر صفر تکرار صفر جمع می کنیم و در سطر صفر تکرار ۱ می نویسیم:

	شماره سطر	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R.H.S
Z	۰	-۲	-۳	۰	۰	۰	۰
S_1	۱						
S_2	۲						
S_3	۳						
Z	۰	-۲	۰	۰	۰	$\frac{۳}{۲}$	۹
S_1	۱		۰				
S_2	۲		۰				
x_2	۳	۰	۱	۰	۰	$\frac{۱}{۲}$	۳



برای سطرهای دیگر هم، به همین شیوه عمل می شود، یعنی برای نوشتن سطر ۱ تکرار ۱، سطر ۳ تکرار ۱ را در ۱- ضرب کردیم و با سطر ۱ تکرار ۰ جمع کردیم.

برای نوشتن سطر ۲ تکرار ۱، سطر ۳ تکرار ۱ را در ۲- ضرب کردیم و با سطر ۲ تکرار صفر جمع کردیم.

تمام محاسبات ما تا اینجا به قرار زیر است:

		X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R.H.S	
Z	۰	-۲	-۳	۰	۰	۰	۰	
S_1	۱	۲	۱	۱	۰	۰	۶	تکرار صفر
S_2	۲	۲	۲	۰	۱	۰	۸	
S_3	۳	۰	۲	۰	۰	۱	۶	
Z	۰	-۲	۰	۰	۰	$\frac{۳}{۲}$	۹	
S_1	۱	۲	۰	۱	۰	$-\frac{۱}{۲}$	۳	تکرار یک
S_2	۲	۲	۰	۰	۱	-۱	۲	
x_2	۳	۰	۱	۰	۰	$\frac{۱}{۲}$	۳	

تکرار ۱- گام ۲ (این تکرار از گام ۲ شروع می شود، چرا ؟ گامها را مرور کنید!)

تنها یک متغیر ضریب منفی دارد، پس x_1 بعنوان ورودی انتخاب می شود.

تکرار ۱- گام ۳

متغیر خروجی به شکل زیر انتخاب می شود:

	شماره سطر	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R.H.S		
Z	۰	-۲	۰	۰	۰	$\frac{۳}{۲}$	۹		
S_1	۱	۲	۰	۱	۰	$-\frac{۱}{۲}$	۳	$\frac{۳}{۲}=۱/۵$	
S_2	۲	۲	۰	۰	۱	-۱	۲	$\frac{۲}{۲}=۱$	← سطر لولا
x_2	۳	۰	۱	۰	۰	$\frac{۱}{۲}$	۳	$\frac{۳}{۰}=\infty$	

پس x_1 متغیر ورودی و S_2 متغیر خروجی است.

تکرار ۱- گام ۴

محاسبات جدول جدید (تکرار ۲) بصورت مرحله ای ارائه شده است. سعی کنید با کمک توضیحات قبلی، خودتان توضیحات کافی را ارائه کنید.

		X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R.H.S
Z	۰	-۲	-۳	۰	۰	۰	۰
S_1	۱	۲	۱	۱	۰	۰	۶
S_2	۲	۲	۲	۰	۱	۰	۸
S_3	۳	۰	۲	۰	۰	۱	۶
Z	۰	-۲	۰	۰	۰	$\frac{۳}{۲}$	۹
S_1	۱	۲	۰	۱	۰	$-\frac{۱}{۲}$	۳
S_2	۲	۲	۰	۰	۱	-۱	۲
x_2	۳	۰	۱	۰	۰	$\frac{۱}{۲}$	۳
Z	۰						
S_1	۱						
x_1	۲	۱	۰	۰	$\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	۱
x_2	۳						

تکرار صفر

تکرار یک

تکرار دو

جدول کامل شده (تکرار ۲)

	شماره سطر	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R.H.S
Z	۰	۰	۰	۰	۱	$\frac{۱}{۲}$	۱۱
S_1	۱	۰	۰	۱	-۱	$\frac{۱}{۲}$	۱
x_1	۲	۱	۰	۰	$\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	۱
x_2	۳	۰	۱	۰	۰	$\frac{۱}{۲}$	۳

مشاهده می کنید که تمامی ضرائب در سطر صفر جدول تکرار دوم مثبت هستند، پس جدول بهینه است و جواب بهینه عبارتست از :

	x_1 x_2 و	R.H.S
Z		۱۱
S_1		۱
x_1		۱
x_2		۳

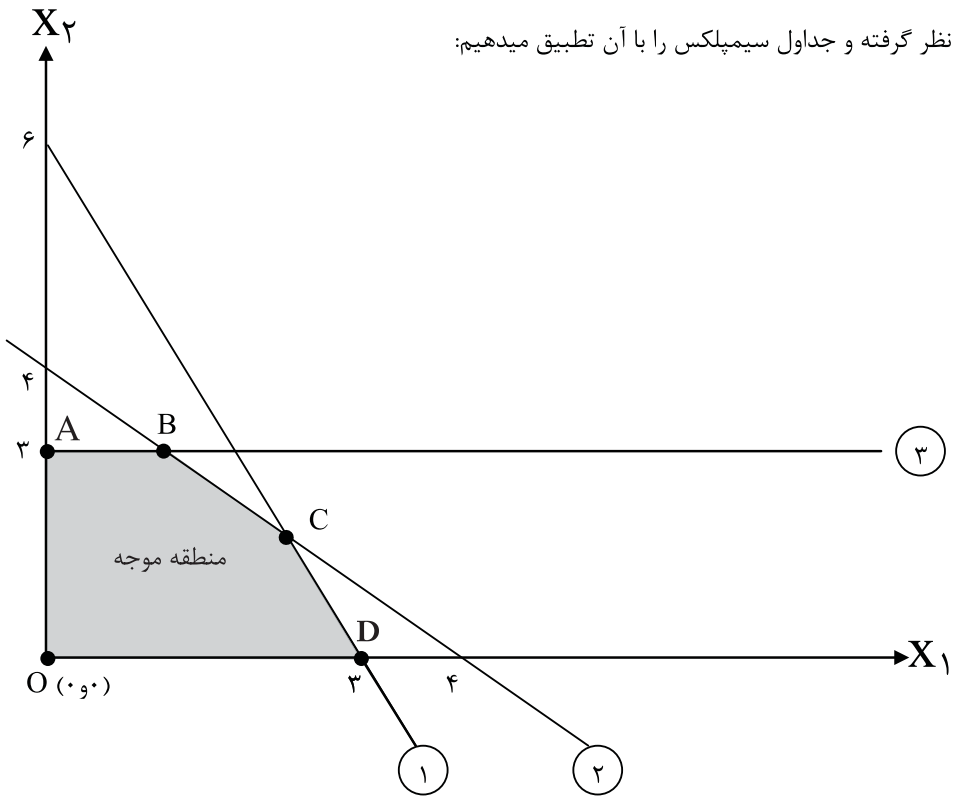
یعنی: $x_2^* = ۳$, $x_1^* = ۱$ $Z^* = ۱۱$

تمامی محاسبات اصلی به شکل زیرند:

		X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R.H.S	
Z	۰	-۲	-۳	۰	۰	۰	۰	
S_1	۱	۲	۱	۱	۰	۰	۶	
S_2	۲	۲	۲	۰	۱	۰	۸	تکرار صفر
S_3	۳	۰	۲	۰	۰	۱	۶	
Z	۰	-۲	۰	۰	۰	$\frac{۳}{۲}$	۹	
S_1	۱	۲	۰	۱	۰	$-\frac{۱}{۲}$	۳	
S_2	۲	۲	۰	۰	۱	-۱	۲	تکرار ۱
x_2	۳	۰	۱	۰	۰	$\frac{۱}{۲}$	۳	
Z	۰	۰	۰	۰	۱	$\frac{۱}{۲}$	۱۱	
S_1	۱	۰	۰	۱	-۱	$\frac{۱}{۲}$	۱	
x_1	۲	۱	۰	۰	$\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	۱	تکرار ۲
x_2	۳	۰	۱	۰	۰	$\frac{۱}{۲}$	۳	
		جدول بهینه است						

$x_1^* = ۱ \quad , \quad x_2^* = ۳ \quad , Z^* = ۱۱$

حال، شکل ترسیمی مدل فوق را در نظر گرفته و جداول سیمپلکس را با آن تطبیق میدهیم:



مشخصات نقطه ها با توجه به حالت ترسیمی

مختصات هر نقطه را بدست می آوریم و با قرار دادن مختصات آن نقطه در هر محدودیت، مقادیر s_1، s_2، s_3 را حساب می کنیم. در نهایت مقدار Z را نیز محاسبه می نمائیم، جدول زیر اطلاعات مربوط به نقاط گوشه ای موجه را نشان می دهد:

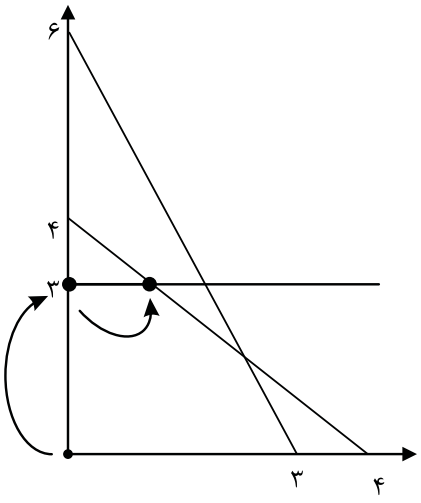
نقطه	مقدار متغیرهای تصمیم		مقادیر متغیرهای کمکی			مقدار Z	متغیرهای اساسی
	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
O	۰	۰	۶	۸	۶	۰	s_1, s_2, s_3
A	۰	۳	۳	۲	۰	۹	s_1, s_2, x_2
B^*	۱	۳	۱	۰	۰	۱۱	s_1, x_1, x_2
C	۲	۲	۰	۰	۲	۱۰	x_1, x_2, s_3
D	۳	۰	۰	۲	۶	۶	x_1, s_2, s_3

نقاط جدول فوق، به ترتیب مجاورت به یکدیگر در جدول قرار داده شده اند. می دانیم که جداول سیمپلکس به ترتیب، نقاط موجه مجاور را بررسی میکند تا به نقطه ای برسد که از نقاط موجه مجاورش بهتر است. همانطور که در جدول فوق مشاهده می شود، نقطه ی B مقدار بهتری را برای Z (در مقایسه با نقاط مجاورش یعنی A,C) ایجاد نموده است و نقطه بهینه می باشد.

تکرار صفر جدول سیمپلکس مربوط به بررسی نقطه O است.

تکرار یک جدول سیمپلکس مربوط به بررسی نقطه A است.

تکرار دو جدول سیمپلکس مربوط به بررسی نقطه B است. و در این نقطه، الگوریتم خاتمه یافته است.



یک مثال دیگر

مدل زیر را از طریق الگوریتم سیمپلکس حل کرده و با حالت ترسیمی مقایسه کنید.

$$\text{Max } Z = ۲x_۱ + ۳x_۲$$

$$st: \begin{cases} x_۱ + x_۲ \le ۶ \\ x_۱ + ۲x_۲ \le ۱۰ \\ ۴x_۱ + ۲x_۲ \le ۲۰ \end{cases}$$

$$x_۱, x_۲ \ge ۰$$

ابتدا مدل را به شکل زیر آماده می کنیم:

$$\text{Max } Z - ۲x_۱ - ۳x_۲$$

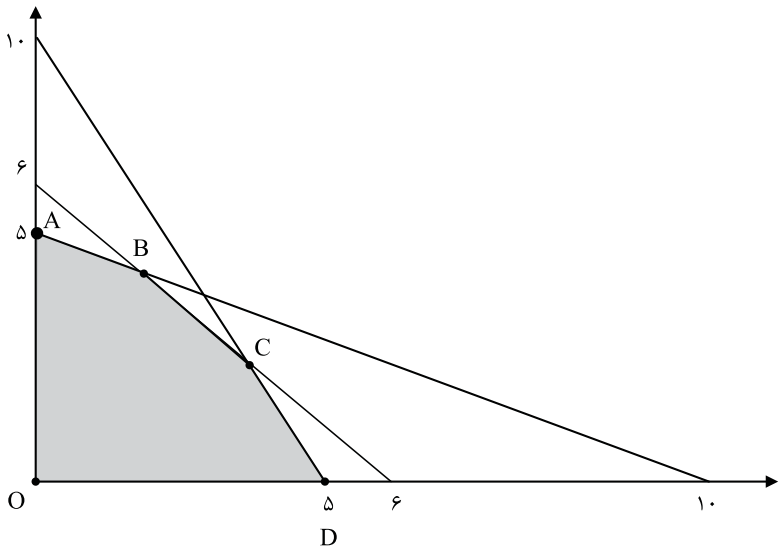
$$st: \begin{cases} x_۱ + x_۲ + s_۱ = ۶ \\ x_۱ + ۲x_۲ + s_۲ = ۱۰ \\ ۴x_۱ + ۲x_۲ + s_۳ = ۲۰ \end{cases}$$

$$x_۱, x_۲ \ge ۰$$

و سپس حل با سیمپلکس:

	$X_۱$	$X_۲$	$S_۱$	$S_۲$	$S_۳$	R.H.S	
Z	-۲	-۳	۰	۰	۰	۰	
$S_۱$	۱	۱	۱	۰	۰	۶	$\frac{۶}{۱} = ۶$
$S_۲$	۱	۲	۰	۱	۰	۱۰	$\frac{۱۰}{۲} = ۵$
$S_۳$	۴	۲	۰	۰	۱	۲۰	$\frac{۲۰}{۲} = ۱۰$
Z	$-\frac{۱}{۲}$	۰	۰	$\frac{۳}{۲}$	۰	۱۵	
$S_۱$	$\frac{۱}{۲}$	۰	۱	$-\frac{۱}{۲}$	۰	۱	$\frac{۱}{\frac{۱}{۲}} = ۲$
$x_۲$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	۰	۵	$\frac{۵}{\frac{۱}{۲}} = ۱۰$
$S_۳$	۳	۰	۰	-۱	۱	۱۰	$\frac{۱۰}{۳}$
Z	۰	۰	۱	۱	۰	۱۶	
$x_۱$	۱	۰	۲	-۱	۰	۲	
$x_۲$	۰	۱	-۱	۱	۰	۴	
$S_۳$	۰	۰	-۶	۲	۱	۴	
	جدول بهینه است $Z^* = ۱۶ \;,\; x_۱^* = ۲ \;,\; x_۲^* = ۴$						

حالت ترسیمی



نقطه	مقدار متغیرهای تصمیم		مقادیر متغیرهای کمکی			مقدار Z	متغیرهای اساسی
	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
O	۰	۰	۶	۱۰	۲۰	۰	$s_1\ s_2\ s_3$
A	۰	۵	۱	۰	۱۰	۱۵	$s_1\ x_2\ s_3$
B	۲	۴	۰	۰	۴	۱۶	$x_1\ x_2\ s_3$
C	۴	۲	۰	۲	۰	۱۴	$x_1\ x_2\ s_2$
D	۵	۰	۱	۵	۰	۱۰	$s_1\ s_2\ x_1$

مشاهده می گردد که نقطه B نسبت به نقاط موجه مجاورش بهترین مقدار را ارائه کرده است و همین نقطه، نقطه بهینه هم می باشد.

تکرار صفر مربوط به نقطه O است.

تکرار یک مربوط به نقطه A است.

تکرار دو مربوط به نقطه B است.

۳- تابع هدف Min سازی

زمانی که تابع هدف یک مسأله برنامه ریزی خطی (LP) بصورت Min سازی باشد، برای حل آن از طریق الگوریتم سیمپلکس می توان به دو طریق عمل کرد:

۱ - تابع هدف را در (۱-) ضرب کرده و سپس آنرا همانند یک مدل Max سازی حل کنیم.

۲ - مدل را وارد جدول کرده و به جای ورودی گرفتن منفی ترین عدد سطر صفر، مثبت ترین آنها را جهت انتخاب متغیر ورودی انتخاب کنیم . در این حالت شرط بهینگی آن است که تمامی اعداد سطر صفر مثبت باشند .

مثال- مدل زیر را از طریق الگوریتم سیمپلکس حل کنید (به دو روش فوق) و آنرا با حالت ترسیمی مقایسه کنید؟

$$\text{Min}\, Z = x_۱ - ۳x_۲$$
$$st: \begin{cases} -۲x_۱ + x_۲ \le ۶ \\ ۸x_۱ + ۶x_۲ \le ۴۸ \end{cases}$$
$$x_۱, x_۲ \ge ۰$$

روش اول: تابع هدف را در (۱-) ضرب کرده و حل را بصورت عادی (ماکزیمم سازی) ادامه میدهیم:

$$Max\ (-Z) = -x_۱ + ۳x_۲$$
$$st: \begin{cases} -۲x_۱ + x_۲ \le ۶ \\ ۸x_۱ + ۶x_۲ \le ۴۸ \end{cases}$$
$$x_۱, x_۲ \ge ۰$$

$$\xrightarrow[\text{ورود به جدول سیمپلکس}]{\text{آماده کردن مدل جهت}}$$

$$Max(-Z) + x_۱ - ۳x_۲$$
$$st: \begin{cases} -۲x_۱ + x_۲ + s_۱ = ۶ \\ ۸x_۱ + ۶x_۲ + s_۲ = ۴۸ \end{cases}$$
$$x_۱, x_۲, s_۱, s_۲ \ge ۰$$

	شماره سطر	X_1	X_2	S_1	S_2	R.H.S	
-Z	۰	۱	-۳	۰	۰	۰	
S_1	۱	-۲	۱	۱	۰	۶	$\frac{۶}{۱}=۶$
S_2	۲	۸	۶	۰	۱	۴۸	$\frac{۴۸}{۶}=۸$
-Z	۰	-۵	۰	۳	۰	۱۸	
x_2	۱	-۲	۱	۱	۰	۶	×
S_2	۲	۲۰	۰	-۶	۱	۱۲	$\frac{۱۲}{۲۰}$
-Z	۰	۰	۰	$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	۲۱	
x_2	۱	۰	۱	$\frac{۸}{۲۰}$	$\frac{۲}{۲۰}$	$\frac{۱۴۴}{۲۰}$	
x_1	۲	۱	۰	$-\frac{۶}{۲۰}$	$\frac{۱}{۲۰}$	$\frac{۱۲}{۲۰}$	
		جدول بهینه است $Z^*=+۲۱\ ,\ x_1^*=\frac{۱۲}{۲۰}\ ,\ x_2^*=\frac{۱۴۴}{۲۰}$					

*توجه داشته باشید که علامت منفی پشت Z در سطر صفر هر جدول به این معناست که تابع هدف را در منفی ضرب کرده ایم. از این نکته گاها در تست ها استفاده می شود .

توجه داشته باشید که مقدار Z^* را در (۱-)

ضرب می کنیم تا جواب بهینه مدل اصلی حاصل شود پس داریم:

$$Z^*=-۲۱\ ,\ x_1^*=\frac{۱۲}{۲۰}\ ,\ x_2^*=\frac{۱۴۴}{۲۰}$$

روش دوم:

ابتدا مدل را آماده ورود به جدول کرده و پس از وارد کردن به جدول، با در نظر گرفتن نکته مربوط به انتخاب متغیر ورودی که توضیح آن داده شد، حل را ادامه میدهیم تا به جواب بهینه برسیم.

$$Min\ Z=x_1-۳x_2 \qquad\qquad Min\ Z-x_1+۳x_2$$

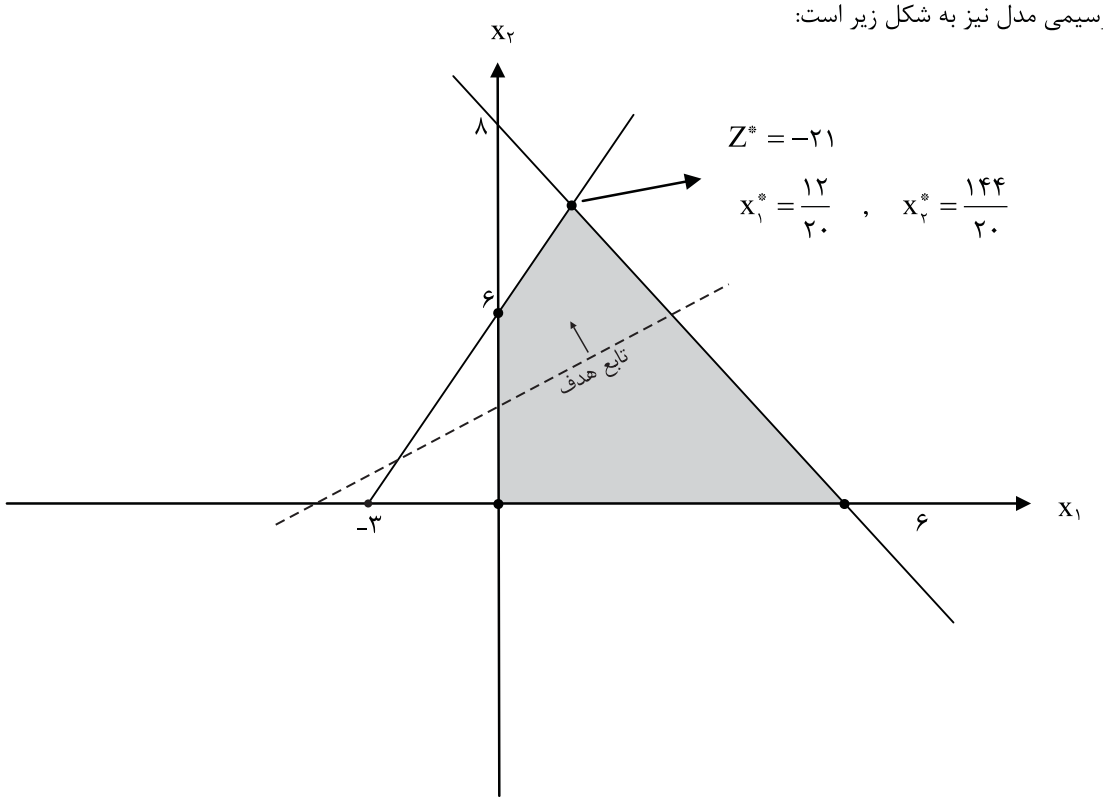
$$st:\begin{cases}-۲x_1+x_2\le ۶\\ ۸x_1+۶x_2\le ۴۸\end{cases} \longrightarrow st:\begin{cases}-۲x_1+x_2+s_1=۶\\ ۸x_1+۶x_2+s_2=۴۸\end{cases}$$

$$x_1,x_2\ge ۰ \qquad\qquad x_1,x_2,s_1,s_2\ge ۰$$

	شماره سطر	X_1	X_2	S_1	S_2	R.H.S	
Z	۰	-۱	۳	۰	۰	۰	
S_1	۱	-۲	۱	۱	۰	۶	$\frac{۶}{۱}=۶$
S_2	۲	۸	۶	۰	۱	۴۸	$\frac{۴۸}{۶}=۸$
Z	۰	۵	۰	-۳	۰	-۱۸	
x_2	۱	-۲	۱	۱	۰	۶	×
S_2	۲	۲۰	۰	-۶	۱	۱۲	$\frac{۱۲}{۲۰}$
Z	۰	۰	۰	$-\frac{۳}{۲}$	$-\frac{۱}{۴}$	-۲۱	
x_2	۱	۰	۱	$\frac{۸}{۲۰}$	$\frac{۲}{۲۰}$	$\frac{۱۴۴}{۲۰}$	
x_1	۲	۱	۰	$-\frac{۶}{۲۰}$	$\frac{۱}{۲۰}$	$\frac{۱۲}{۲۰}$	
		$Z^*=-۲۱$					
		$x_1^*=\frac{۱۲}{۲۰}$, $x_2^*=\frac{۱۴۴}{۲۰}$					

متغیر ورودی از مثبت ترین عدد سطر صفر انتخاب شد و متغیر خروجی بصورت عادی تعیین می‌شود.

حالت ترسیمی مدل نیز به شکل زیر است:



۴- روش M بزرگ (Big M)

همانطور که گفته شد، از این الگوریتم برای حل مسائلی استفاده می شود که دارای محدودیت با علامت «بزرگتر مساوی» و یا «مساوی» باشند.

برای حل مسأله با روش M بزرگ، ابتدا مدل را برای ورود به جدول سیمپلکس آماده می کنیم، برای این کار ابتدا متغیرهای کمکی و مصنوعی لازم را به محدودیت ها می افزائیم. سپس به ازاء هر R_i ، جریمه ای معادل $-MR_i$ به تابع هدف Max اضافه می کنیم . اگر تابع هدف Min بود ، جریمه ای معادل با MRi به آن اضافه می شود . سپس همه ی جملات تابع هدف را به سمت چپ علامت تساوی منتقل نموده و مدل را وارد جدول می کنیم.

مراحل حل در قالب یک مثال شرح داده می شود.

مثال) مدل زیر را توسط روش M بزرگ حل کرده و در پایان با حالت ترسیمی مقایسه کنید؟

$$Max\ Z = ۴x_۱ + ۶x_۲$$

$$st: \begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ \geq ۴ \\ -x_۱ + x_۲ \leq ۳ \\ ۲x_۱ + ۲x_۲ \leq ۱۰ \end{cases}$$

$$x_۱, x_۲ \geq ۰$$

*گام اول: آماده کردن مدل جهت ورود به جدول

محدودیت دوم دارای علامت بزرگتر مساوی است، به همین جهت متغیر کمکی (s) را از سمت چپ آن کم می کنیم، (چون متغیر $s_۱$ دارای ضریب منفی شد، نمی تواند متغیر اساسی باشد) و یک متغیر مصنوعی $R_۱$ به سمت چپ آن می افزائیم (این متغیر اساسی خواهد بود) . همچنین جریمه ی $-MR_۱$ را به تابع هدف می افزائیم.

$$Max\ Z = ۴x_۱ + ۶x_۲ - MR_۱$$

$$st: \begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ - s_۱ + R_۱ = ۴ \\ -x_۱ + x_۲ + s_۲ = ۳ \\ ۲x_۱ + ۲x_۲ + s_۳ = ۱۰ \end{cases}$$

$$x_۱, x_۲, s_۱, s_۲, s_۳, R_۱ \geq ۰$$

$$\longrightarrow$$

$$Max\ Z - ۴x_۱ - ۶x_۲ + MR_۱ = ۰$$

$$t: \begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ - s_۱ + R_۱ = ۴ \\ -x_۱ + x_۲ + s_۲ = ۳ \\ ۲x_۱ + ۲x_۲ + s_۳ = ۱۰ \end{cases}$$

$$x_۱, x_۲, s_۱, s_۲, s_۳, R_۱ \geq ۰$$

سپس مدل را وارد جدول سیمپلکس می کنیم، متغیر R_1 می تواند پس از s_1 یا بعنوان آخرین متغیر نوشته شود، ما آن را پس از s_1 نوشتیم:

	شماره سطر	X_1	X_2	S_1	R_1	S_2	S_3	R.H.S	
Z	۰	-۴	-۶	۰	M	۰	۰	۰	
R_1	۱	۱	۲	-۱	۱	۰	۰	۴	
S_2	۲	-۱	۱	۰	۰	۱	۰	۳	
S_3	۳	۲	۲	۰	۰	۰	۱	۱۰	

تکرار صفر

در جدول فوق ، R_1 متغیر اساسی محدودیت اول و s_2 و s_3 متغیرهای اساسی محدودیت های دوم و سوم هستند، می دانیم که هر متغیر اساسی در جدول سیمپلکس باید در سطر خودش دارای ضریب ۱ و در مابقی سطرها دارای ضریب صفر باشد، با دقت در جدول بالا مشاهده می کنید که R_1 در سطر صفر دارای ضریب M است، از اینرو قبل از انتخاب متغیر ورودی باید این مشکل حل شود. برای رفع این مشکل باید سطر ۱ را در (-M) ضرب کرده و با سطر صفر جمع نمائیم. با انجام این کار، مشکل موجود برای این متغیر اساسی حل میشود.

*گام دوم: اصلاح جدول

حاصل عملیات فوق به شکل زیر است که ما آنرا تکرار صفر اصلاح شده می نامیم

	شماره سطر	X_1	X_2	S_1	R_1	S_2	S_3	R.H.S	
Z	۰	-۴-M	-۶-۲M	M	۰	۰	۰	-۴M	
R_1	۱	۱	۲	-۱	۱	۰	۰	۴	
S_2	۲	-۱	۱	۰	۰	۱	۰	۳	
S_3	۳	۲	۲	۰	۰	۰	۱	۱۰	

*گامهای بعدی همانند روش سیمپلکس است فقط باید عملیات طوری باشد که M نیز در نظر گرفته شود.

انتخاب متغیر ورودی:

می دانیم M مقدار بسیار بزرگی است. پس در انتخاب متغیر ورودی، ضریب علامت M در اولویت است. در جدول زیر ، عدد (۲M-۶-) از همه منفی تر است، از اینرو این ستون را لولا کرده و متغیر $x_۲$ را بعنوان متغیر ورودی انتخاب می کنیم. متغیر خروجی نیز بصورت عادی انتخاب می شود:

	شماره سطر	$X_۱$	$X_۲$	$S_۱$	$R_۱$	$S_۲$	$S_۳$	R.H.S	
Z	۰	-۴-M	-۶-۲M	M	۰	۰	۰	-۴M	
$R_۱$	۱	۱	۲	-۱	۱	۰	۰	۴	$\frac{۴}{۲}=۲$
$S_۲$	۲	-۱	۱	۰	۰	۱	۰	۳	$\frac{۳}{۱}=۳$
$S_۳$	۳	۲	۲	۰	۰	۰	۱	۱۰	$\frac{۱۰}{۲}=۵$

برای تشکیل جدول بعد (تکرار ۱)، نسبت به حالت عادی سیمپلکس تنها یک نکته وجود دارد و آن اینست که برای صفر کردن ضریب متغیر $x_۲$ در سطر صفر تکرار صفر اصلاح شده (تکرار فوق) که همان (۲M-۶-) است، سطر ۱ تکرار ۱ را باید در (۲M+۶) ضرب کرده و با سطر صفر جمع کنیم:

	شماره سطر	$X_۱$	$X_۲$	$S_۱$	$R_۱$	$S_۲$	$S_۳$	R.H.S	
Z	۰			۰					
$x_۲$	۱	$\frac{۱}{۲}$	۱	$-\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	۰	۲	
$S_۲$	۲			۰					
$S_۳$	۳			۰					

سطر تکرار صفر اصلاح شده

$\rightarrow \times(۶+۲M) \rightarrow$ نظیر به نظیر $\rightarrow +$

		$X_۱$	$X_۲$	$S_۱$	$R_۱$	$S_۲$	$S_۳$	R.H.S	
Z	۰	-۱	۰	-۳	۳+M	۰	۰	۱۲	
$x_۲$	۱	$\frac{۱}{۲}$	۱	$-\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	۰	۲	
$S_۲$	۲	$-\frac{۳}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	۱	۰	۱	
$S_۳$	۳	۱	۰	۱	-۱	۰	۱	۶	

تکرار ۱

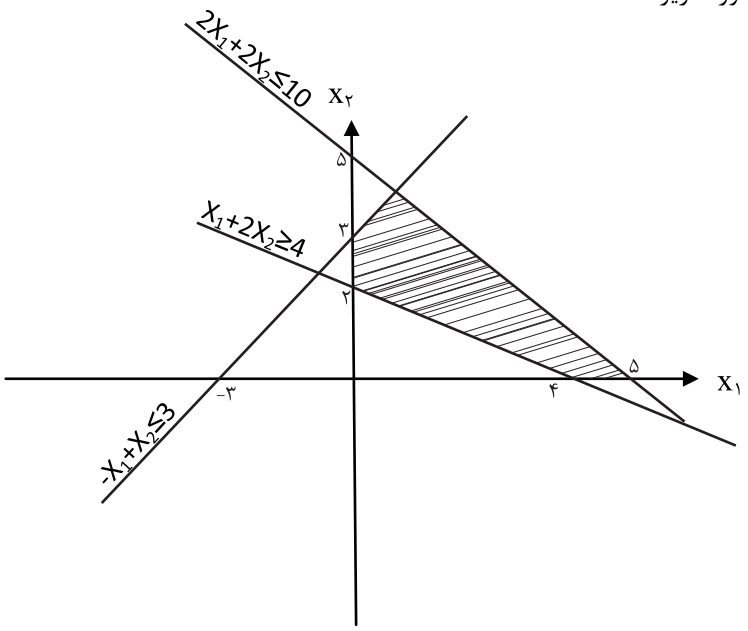
با توجه به اینکه متغیر $R_۲$ خروجی شد، از این جدول به بعد می توانیم ستون مربوط به آن را حذف کرده و از محاسبات کنار بگذاریم (دیگر رسالتش را انجام داد!)، اما محاسبات آن ممکن است در تحلیل حساسیت به درد ما بخورد که در فصول بعدی بدان خواهیم پرداخت.

محاسبات ما تا این مرحله به همراه ادامه حل تا جواب نهایی در جدول زیر موجود است:

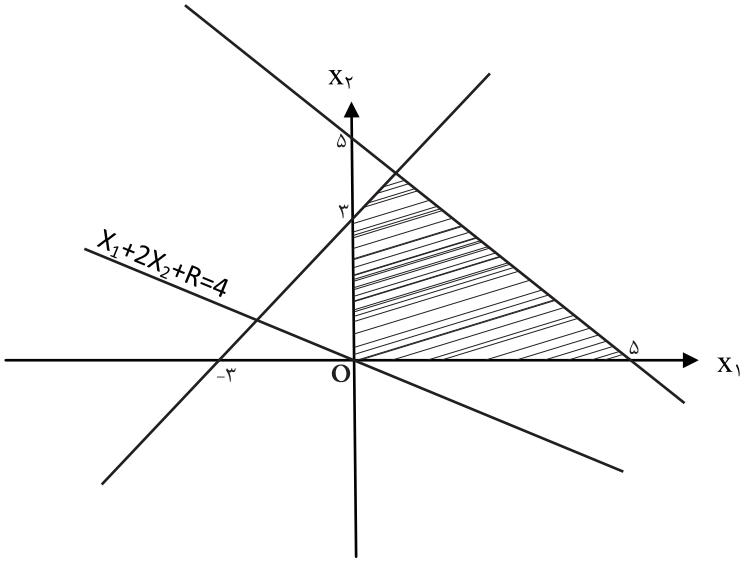
		$X_۱$	$X_۲$	$S_۱$	$R_۱$	$S_۲$	$S_۳$	R.H.S	
Z	۰	-۴	-۶	۰	M	۰	۰	۰	
$R_۱$	۱	۱	۲	-۱	۱	۰	۰	۴	تکرار صفر
$S_۲$	۲	-۱	۱	۰	۰	۱	۰	۳	
$S_۳$	۳	۲	۲	۰	۰	۰	۱	۱۰	
Z	۰	-۴-M	-۶-۲M	M	۰	۰	۰	-۴M	
$R_۱$	۱	۱	۲	-۱	۱	۰	۰	۴	
$S_۲$	۲	-۱	۱	۰	۰	۱	۰	۳	تکرار صفر اصلاح شده
$S_۳$	۳	۲	۲	۰	۰	۰	۱	۱۰	
Z	۰	-۱	۰	-۳	۳+M	۰	۰	۱۲	
$x_۲$	۱	$\frac{۱}{۲}$	۱	$-\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	۰	۲	
$S_۲$	۲	$-\frac{۳}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	۱	۰	۱	تکرار یک
$S_۳$	۳	۱	۰	۱	-۱	۰	۱	۶	
Z	۰	-۱۰	۰	۰	M	۶	۰	۱۸	
$x_۲$	۱	-۱	۱	۰	۰	۱	۰	۳	
$S_۱$	۲	-۳	۰	۱	-۱	۲	۰	۲	تکرار دو
$S_۳$	۳	۴	۰	۰	۰	-۲	۱	۴	
Z	۳	۴	۰	۰	۰	۱	$\frac{۱۰}{۴}$	۲۸	
$x_۲$	۱	۰	۱	۰	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	۴	
$S_۱$	۲	۰	۰	۱	-۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۳}{۴}$	۵	تکرار سه
$x_۱$	۳	۱	۰	۰	۰	$-\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	۱	
		جدول بهینه است $Z^* = ۲۸ \quad , \quad x_۱^* = ۱ \quad , \quad x_۲^* = ۴$							

توجه : اصلاح تکرار صفر را میتوان در همان جدول صفر منظور کرد و جدولی تحت عنوان تکرار صفر اصلاح شده را ننوشت . این کار مرسوم تر است، اما ما تکرار صفر اصلاح شده را جهت تسهیل یادگیری نوشتیم.

حالت ترسیمی مدل اصلی بصورت زیر است:



در جدول اول، با توجه به اینکه $R_1=4$ است، شکل ترسیمی (با فرض $s_1=s_2=s_3=0$)بصورت زیر است:



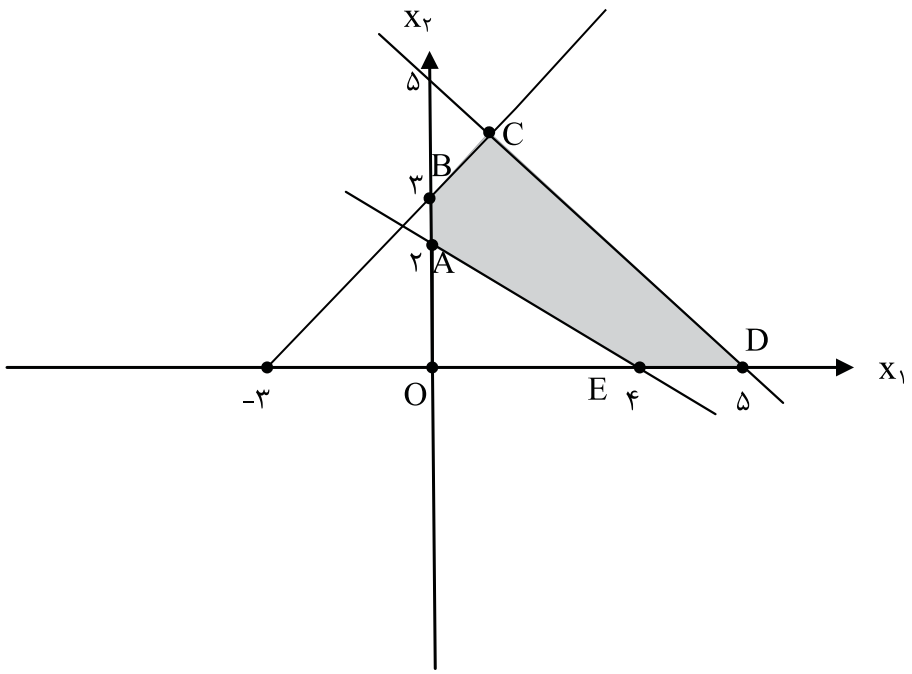
یعنی محدودیت اول به پائین منتقل شده و منطقه موجه افزایش یافته است، زیرا:

$$x_1+2x_2-s_1+R_1=4 \xrightarrow{(s_1=0,R_1=4)} x_1+2x_2+4=4 \Rightarrow x_1+2x_2=0$$

یعنی منطقه موجه افزایش یافته است تا جدول بتواند کار خود را از نقطه (۰،۰) آغاز کند.

تکرار صفر و تکرار صفر اصلاح شده مربوط به بررسی نقطه ی O است .

در تکرار ۱ مقدار $R_1=0$ می شود، از اینرو محدودیت به حالت عادی خود بازگشته و از آن به بعد جستجو در منطقه موجه اصلی مدل صورت می پذیرد. به شکل بعد توجه کنید:



تکرار ۱ به بررسی نقطه ی A پرداخته است.

تکرار ۲ به بررسی نقطه ی B پرداخته است.

تکرار ۳ به بررسی نقطه ی C پرداخته است. وهمین نقطه در بر دارنده جواب بهینه است.

۵- روش «دوفاز» یا «دو مرحله ای»

روش دو فاز نیز برای حل مسائل خطی ای که دارای محدودیت های با علامت «بزرگتر مساوی» یا «مساوی» هستند به کار می رود.

روش دو فاز مسئله را طی دو مرحله حل می کند.

مرحله اول: پیدا کردن جواب موجه ابتدایی (با استفاده از تابع هدف مصنوعی)

مرحله دوم: پیدا کردن جواب بهینه (با استفاده از تابع هدف اصلی مسأله)

این روش نیز در قالب یک مثال توضیح داده می شود(این مثال همان مثال روش M بزرگ است، می توانید آنها را با هم مقایسه کنید)

مثال) مسأله زیر را با استفاده از روش دو مرحله ای حل کنید.

$$Max\ Z = ۴x_۱ + ۶x_۲$$

$$st: \begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ \geq ۴ \\ -x_۱ + x_۲ \leq ۳ \\ ۲x_۱ + ۲x_۲ \leq ۱۰ \end{cases}$$

$$x_۱, x_۲ \geq ۰$$

گام ۱- آماده کردن مدل

ابتدا مدل را جهت ورود به جدول سیمپلکس آماده می کنیم به این ترتیب که به محدودیت ها ، متغیرهای کمکی و مصنوعی لازم را اضافه می کنیم و عناصر تابع هدف را به سمت چپ منتقل می کنیم:

$$\text{Max } Z - ۴x_۱ - ۶x_۲$$

$$st: \begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ - s_۱ + R_۱ = ۴ \\ -x_۱ + x_۲ + s_۲ = ۳ \\ ۲x_۱ + ۲x_۲ + s_۳ = ۱۰ \end{cases}$$

$$x_۱, x_۲, s_۱, s_۲, s_۳, R_۱ \geq ۰$$

گام ۲- تعریف تابع هدف مصنوعی

تابع هدف مصنوعی عبارتست از حداقل سازی مجموع متغیرهای مصنوعی ، یعنی: $\text{Min } W = \sum Ri$

که برای این مدل بصورت مقابل است: $\text{Min } W = R_۱$

مدل استانداردی که برای جداول سیمپلکس تعریف کردیم، مدلی است که تابع هدف Max داشته باشد، گفتیم که اگر چنین نبود، آنرا در یک (-) ضرب می کنیم تا Max سازی شود، پس تابع هدف مصنوعی را بصورت زیر تغییر می دهیم، آنرا برای ورود به جدول سیمپلکس آماده کرده و به همراه محدودیت ها می نویسیم:

$$Max(-W) = -R_1 \quad \Rightarrow \quad Max(-W) + R_1 = 0$$

$$st: \begin{cases} x_1 + 2x_2 - s_1 + R_1 = 4 \\ -x_1 + x_2 + s_2 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + s_3 = 10 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, R_1 \geq 0$$

مدل را وارد جدول می کنیم:

فاز اول- تکرار صفر

	شماره سطر	X_1	X_2	S_1	R_1	S_2	S_3	R.H.S
-W	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰
R_1	۱	۱	۲	-۱	۱	۰	۰	۴
S_2	۲	-۱	۱	۰	۰	۱	۰	۳
S_3	۳	۲	۲	۰	۰	۰	۱	۱۰

همانطور که مشاهده می کنید، متغیر اساسی R_1 یکّه نیست، یعنی در سطر خودش ضریب ۱ دارد و باید در بقیه سطرها ضریب صفر داشته باشد، اما در تابع هدف نیز ضریب آن ۱ است، از اینرو سطر ۱ را در (۱-) ضرب کرده و با سطر صفر جمع می کنیم. جدول اصلاح شده (یکّه شده) بصورت زیر است:

فاز اول- تکرار صفر اصلاح شده

	شماره سطر	X_1	X_2	S_1	R_1	S_2	S_3	R.H.S
-W	۰	-۱	-۲	۱	۰	۰	۰	-۴
R_1	۱	۱	۲	-۱	۱	۰	۰	۴
S_2	۲	-۱	۱	۰	۰	۱	۰	۳
S_3	۳	۲	۲	۰	۰	۰	۱	۱۰

سپس مراحل حل را همانند جداول عادی سیمپلکس ادامه میدهیم تا شرط بهینگی برقرار شود (اعداد سطر صفر همگی صفر و مثبت باشند). محاسبات انجام شده تا این مرحله و ادامه محاسبات تا برقراری شرط بهینگی به قرار زیر است:

		شماره سطر	X_1	X_2	S_1	R_1	S_2	S_3	R.H.S	
	-W	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	
فاز اول- تکرار صفر	R_1	۱	۱	۲	-۱	۱	۰	۰	۴	
	S_2	۲	-۱	۱	۰	۰	۱	۰	۳	
	S_3	۳	۲	۲	۰	۰	۰	۱	۱۰	
	-W	۰	-۱	-۲	۱	۰	۰	۰	-۴	
فاز اول- تکرار صفر اصلاح شده	R_1	۱	۱	۲	-۱	۱	۰	۰	۴	$\frac{۴}{۲}=۲$
	S_2	۲	-۱	۱	۰	۰	۱	۰	۳	$\frac{۳}{۱}=۳$
	S_3	۳	۲	۲	۰	۰	۰	۱	۱۰	$\frac{۱۰}{۲}=۵$
	-W	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	
فاز اول- تکرار ۱	x_2	۱	$\frac{۱}{۲}$	۱	$-\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	۰	۲	
	S_2	۲	$-\frac{۳}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	۱	۰	۱	
	S_3	۳	۱	۰	۱	-۱	۰	۱	۶	
			جدول بهینه است پایان فاز اول							

توضیح مفهومی: فاز اول زمانی خاتمه می یابد که به منطقه موجه اصلی مسأله برسیم. به شکل ترسیمی این مدل نگاه کنید، نقطه ی (۰،۰) O در منطقه ی اصلی نیست، فاز اول زمانی خاتمه یافت که به نقطه ی A(۰،۲) رسیدیم، حال، یافتن نقطه ی بهینه در منطقه موجه اصلی مسأله به عهده ی فاز دوم است.

فاز دوم:

برای شروع فاز دوم، محدودیت های پایانی فاز اول (فاز اول- تکرار ۱) را استخراج کرده و در یک جدول جدید می نویسیم. سپس تابع هدف اصلی مسأله را بعد از آماده سازی (انتقال متغیرها به سمت چپ) وارد جدول می کنیم:

نوشتن محدودیت های آخرین تکرار فاز ۱ در جدولی جدید:

	شماره سطر	X_1	X_2	S_1	R_1	S_2	S_3	R.H.S
x_2	۱	$\frac{1}{2}$	۱	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	۰	۲
S_2	۲	$-\frac{3}{2}$	۰	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	۱	۰	۱
S_3	۳	۱	۰	۱	-۱	۰	۱	۶

آماده کردن تابع هدف اصلی مسأله و اضافه کردن آن به جدول فوق:

$$\text{Max } Z = ۴x_1 + ۶x_2 \;\Rightarrow\; \text{Max } Z - ۴x_1 - ۶x_2$$

فاز دوم - تکرار صفر

	شماره سطر	X_1	X_2	S_1	R_1	S_2	S_3	R.H.S
Z	۰	-۴	-۶	۰	۰	۰	۰	۰
x_2	۱	$\frac{1}{2}$	۱	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	۰	۲
S_2	۲	$-\frac{3}{2}$	۰	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	۱	۰	۱
S_3	۳	۱	۰	۱	-۱	۰	۱	۶

همانطور که مشاهده می شود جدول یکّه نیست، یعنی متغیر اساسی x_2 در سطر ۰ دارای ضریب ۰ نیست (اما متغیرهای اساسی s_3 ، s_2 در سطر خودشان دارای ضریب ۱ و در بقیه سطرها دارای ضریب صفرند) از اینرو سطر ۱ را در ۶ ضرب کرده و با سطر صفر جمع می کنیم تا این مشکل برطرف شود. جدول اصلاح شده بصورت زیر است:

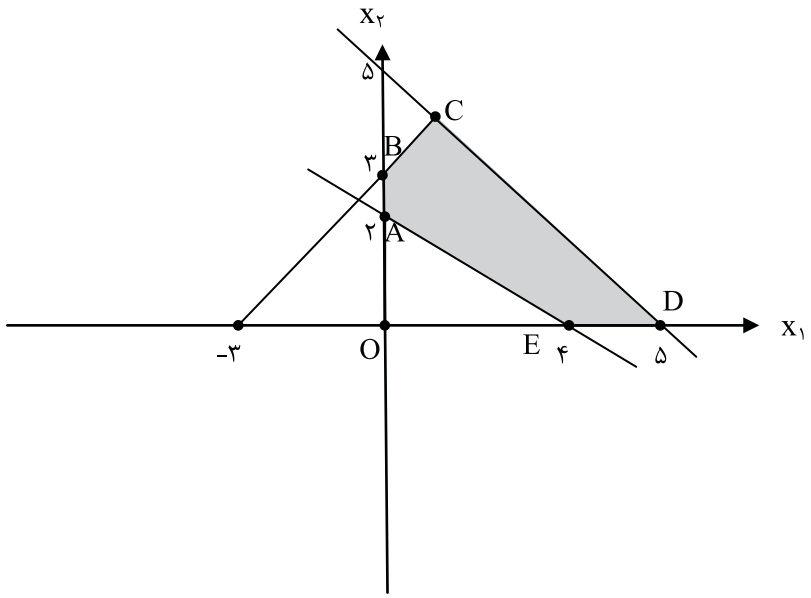
فاز دوم - تکرار صفر اصلاح شده

	شماره سطر	X_1	X_2	S_1	R_1	S_2	S_3	R.H.S
Z	۰	-۱	۰	-۳	۳	۰	۰	۱۲
x_2	۱	$\frac{1}{2}$	۱	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	۰	۲
S_2	۲	$-\frac{3}{2}$	۰	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	۱	۰	۱
S_3	۳	۱	۰	۱	-۱	۰	۱	۶

سپس جدول فوق را بصورت عادی ادامه میدهیم تا به جواب بهینه برسیم، تمامی محاسبات فاز ۲ به شرح زیر است:

		شماره سطر	X_1	X_2	S_1	R_1	S_2	S_3	R.H.S	
	Z	۰	-۴	-۶	۰	۰	۰	۰	۰	
فاز ۲- تکرار ۰	x_2	۱	$\frac{1}{2}$	۱	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	۰	۲	
	S_2	۲	$-\frac{3}{2}$	۰	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	۱	۰	۱	
	S_3	۳	۱	۰	۱	-۱	۰	۱	۶	
	Z	۰	-۱	۰	-۳	۳	۰	۰	۱۲	
فاز ۲- تکرار ۰ اصلاح شده	x_2	۱	$\frac{1}{2}$	۱	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	۰	۲	×
	S_2	۲	$-\frac{3}{2}$	۰	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	۱	۰	۱	$=\frac{1}{\frac{1}{2}}$
	S_3	۳	۱	۰	۱	-۱	۰	۱	۶	$\frac{6}{1}=6$
	Z	۰	-۱۰	۰	۰	۰	۶	۰	۱۸	
فاز ۲- تکرار ۱	x_2	۱	-۱	۱	۰	۰	۱	۰	۳	×
	S_1	۲	-۳	۰	۱	-۱	۲	۰	۲	×
	S_3	۳	۴	۰	۰	۰	-۲	۱	۴	$\frac{4}{4}=1$
	Z	۰	۰	۰	۰	۰	۱	$\frac{10}{4}$	۲۸	
فاز ۲- تکرار ۲	x_2	۱	۰	۱	۰	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	۴	
	S_1	۲	۰	۰	۱	-۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	۵	
	x_1	۳	۱	۰	۰	۰	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	۱	
			جدول بهینه است $Z^* = 28 \quad x_1^* = 1 \ , x_2^* = 4$							

حالت ترسیمی مدل اصلی به شکل زیر است:



«فاز اول، تکرار صفر» نقطه ی O را بررسی کرده

«فاز اول، تکرار ۱» به نقطه ی A رسیده است.

«فاز دوم، تکرار صفر» نقطه ی A را بررسی کرده

«فاز دوم، تکرار یک» نقطه ی B را بررسی کرده

«فاز دوم، تکرار دو» نقطه ی C را بررسی کرده و همین نقطه، در بردارنده جواب بهینه است.

تمرین:

می دانیم که روش M بزرگ و دو فاز، یک سلسله جوابهای اساسی یکسان ارائه می کنند، بعنوان تمرین یکبار دیگر مثال ارائه شده را با روش Big M و یک بار با روش دو فاز در دو برگه جداگانه حل کرده و جداول آنها را با یکدیگر مقایسه کنید.

۶- مسأله با متغیرهای آزاد در علامت

در مدل های عادی برنامه ریزی خطی، همواره شرطی بصورت $x_i \geq ۰$ وجود دارد که در زیر مدل نوشته می شود، در یک مدل دو متغیره، این شرط باعث می شود متغیرها همواره مقدار صفر یا مثبت داشته باشند (جواب در ربع اول قرار گیرد)، اما گاهی ممکن است یک یا چند متغیر، بصورت آزاد در علامت باشند. برای اینکه الگوریتم سیمپلکس مختل نشود و بتوانیم از آن برای حل مسائلی که متغیرهای آزاد در علامت دارند استفاده کنیم، هر متغیر آزاد در علامت را باید بصورت زیر تغییر متغیر داد:

$$xj = x'_j - x''_j$$

که در رابطه فوق Xj آزاد در علامت بوده و $x''_j \geq ۰$ و $x'_j \geq ۰$ هستند.

مثال) مدل زیر را از طریق الگوریتم سیمپلکس حل کرده و با حالت ترسیمی مقایسه کنید؟

$$\text{Max } Z = -x_۱ + ۳x_۲$$

$$st: \begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ \leq ۴ \\ -۲x_۱ + x_۲ \leq ۶ \end{cases}$$

$x_۱,\ x_۲ \geq ۰$ آزاد در علامت

حل: با توجه به اینکه متغیر $x_۱$ آزاد در علامت است، ابتدا تغییر متغیر $x_۱ = x'_۱ - x''_۱$ را در مدل اعمال می کنیم (یعنی به جای $x_۱$ آزاد در علامت، $x'_۱ - x''_۱$ را جایگذاری می کنیم و شرط $x''_۱ \geq ۰$ و $x'_۱ \geq ۰$ را نیز در پائین مدل می نویسیم):

$$Max\ Z = -(x'_۱ - x''_۱) + ۳x_۲$$

$$st: \begin{cases} (x'_۱ - x''_۱) + ۲x_۲ \leq ۴ \\ -۲(x'_۱ - x''_۱) + x_۲ \leq ۶ \end{cases}$$

$$x'_۱,\ x''_۱,\ x_۲ \geq ۰$$

$$\Rightarrow$$

$$Max\ Z = -x'_۱ + x''_۱ + ۳x_۲$$

$$st: \begin{cases} x'_۱ - x'' + ۲x_۲ \leq ۴ \\ -۲x'_۱ + ۲x''_۱ + x_۲ \leq ۶ \end{cases}$$

$$x'_۱,\ x''_۱,\ x_۲ \geq ۰$$

سپس مدل را برای ورود به جدول آماده می کنیم، آنرا وارد جدول سیمپلکس کرده و حل را تا برقراری شرط بهینگی ادامه میدهیم:

$$Max\ Z + x'_۱ - x''_۱ - ۳x_۲$$

$$st: \begin{cases} x'_۱ - x''_۱ + ۲x_۲ + s_۱ = ۴ \\ -۲x'_۱ + ۲x''_۱ + x_۲ + s_۲ = ۶ \end{cases}$$

$$x'_۱ , x''_۱, x_۲, s_۱, s_۲ \geq ۰$$

		$x'_۱$	$x''_۱$	$x_۲$	$S_۱$	$S_۲$	R.H.S
Z	۰	۱	-۱	-۳	۰	۰	۰
$S_۱$	۱	۱	-۱	۲	۱	۰	۴
$S_۲$	۲	-۲	۲	۱	۰	۱	۶
Z	۰	$\frac{۵}{۲}$	$-\frac{۵}{۲}$	۰	$\frac{۳}{۲}$	۰	۶
$x_۲$	۱	$\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۱}{۲}$	۰	۲
$S_۲$	۲	$-\frac{۵}{۲}$	$\frac{۵}{۲}$	۰	$-\frac{۱}{۲}$	۱	۲
Z	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱۰
$x_۲$	۱	۰	۰	۱	$\frac{۴}{۱۰}$	$\frac{۱}{۵}$	$\frac{۱۴}{۵}$
$x''_۱$	۲	-۱	۱	۰	$-\frac{۱}{۵}$	$\frac{۲}{۵}$	$\frac{۸}{۵}$
		جدول بهینه است $Z^* = ۱۰ \quad x''_۱ = \frac{۸}{۵} , x_۲ = \frac{۱۴}{۵}$ و $(x''_۲ = ۰)$					

در این حال باید توجه داشته باشیم که هدف ما از حل مسأله بدست آوردن مقدار Z^* و متغیرهای $x_۱$ و $x_۲$ است و تعریف $x'_۱$ و $x''_۱$ تنها به دلیل انجام محاسبات صورت پذیرفته است، از اینرو به شکل زیر مقدار متغیرهای تصمیم را حساب می کنیم:

$$x_۱ = x'_۱ - x''_۱ \xrightarrow{\left(x'_۱=۰ , x''_۱=\frac{۸}{۵}\right)} x_۱ = ۰ - \frac{۸}{۵} = -\frac{۸}{۵}$$

$$x_۲ = \frac{۱۴}{۵}$$

پس جواب بهینه عبارتست از:

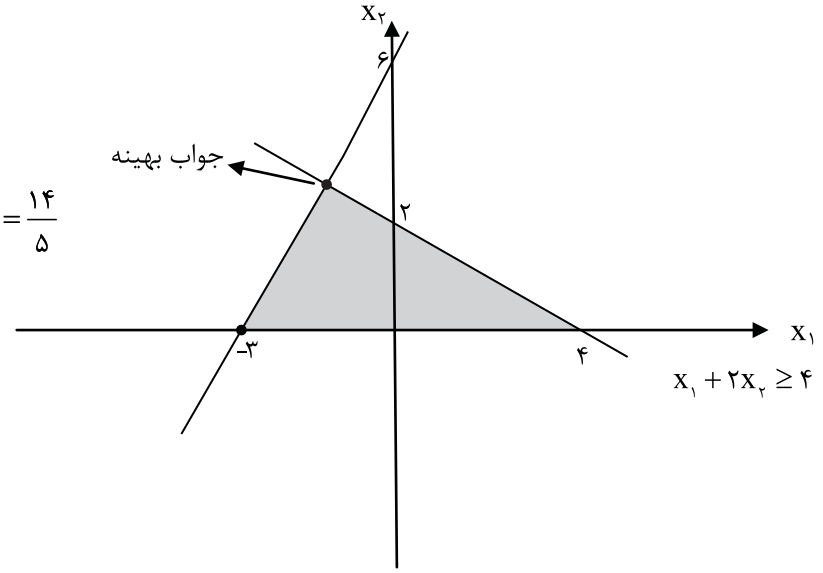
$$Z^* = ۱۰ \qquad x^*_۱ = -\frac{۸}{۵} , x_۲ = \frac{۱۴}{۵}$$

با توجه به اینکه x_1 آزاد در علامت است، می تواند مقدار منفی اختیار کند که اتفاقاً همینطور هم شد.

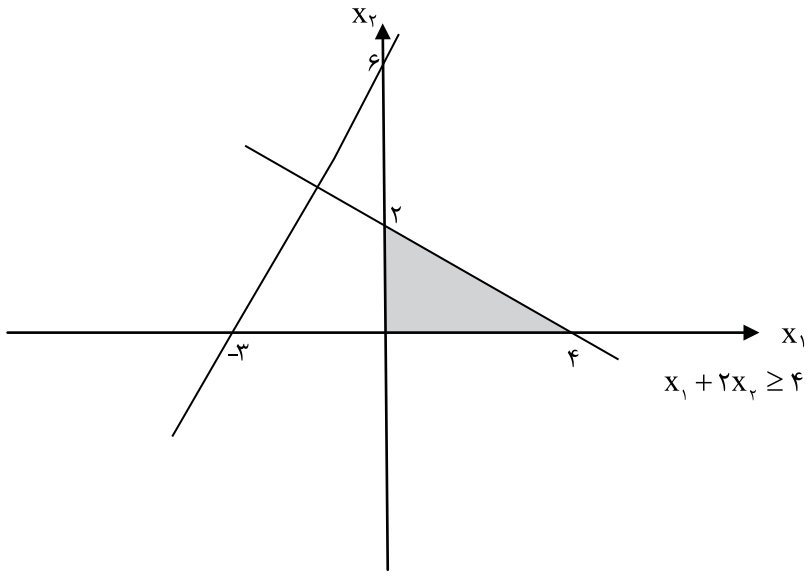
حالت ترسیمی مدل و جواب بهینه به شکل زیر است:

$Z^* = 10$

$x_1^* = -\frac{8}{5} \quad , \; x_2^* = \frac{14}{5}$



توجه داشته باشید که اگر متغیر x_1 آزاد در علامت نبود، منطقه موجه به شکل زیر می شد:



تمرین: اگر x_2 آزاد در علامت و $x_1 \geq 0$ باشد، جواب بهینه مسأله را در حالت ترسیمی و همچنین به وسیله الگوریتم سیمپلکس محاسبه کنید؟

مثال :

این مثال را پس از اتمام فصل چهارم حل کنید:

در مثال زیر، سه فرم غیر استاندارد تابع هدف Min سازی، محدودیت های با علامت «بزرگتر مساوی» و «مساوی» و متغیر آزاد در علامت بصورت همزمان وجود دارند، جواب بهینه را با استفاده از الگوریتم سیمپلکس بدست آورده و آنرا با حالت ترسیمی مقایسه کنید؟

$$Min\ Z = x_1 - 2x_2$$

$$st: \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ 3x_1 + 4x_2 = 12 \\ -x_1 + x_2 \leq 0 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0$$

x_2 آزاد در علامت

قبل از ورود به جدول سیمپلکس، تغییرات زیر را در مدل اعمال می کنیم:

۱ - ابتدا تغییر متغیر را برای متغیر آزاد در علامت لحاظ می کنیم.

۲ - سپس متغیرهای برابر ساز و مصنوعی را به محدودیت ها اضافه (یا کسر) کرده و جریمه های لازم را به تابع هدف می بندیم.

۳ - در نهایت تابع هدف را به Max سازی تبدیل می کنیم.

پس از اتمام تغییرات فوق، مدل را وارد جدول کرده و حل می کنیم:

تغییر اول)

$$x_2 = x'_2 - x''_2$$

$$Min\,Z = x_1 - 2(x'_2 - x''_2)$$

$$st: \begin{cases} x_1 + (x'_2 - x''_2) \geq 1 \\ 3x_1 + 4(x'_2 - x''_2) = 12 \\ -x_1 + (x'_2 - x''_2) \leq 0 \end{cases}$$

$$x_1, x'_2, x''_2 \geq 0$$

$$\Rightarrow$$

$$Min\,Z = x_1 - 2x'_2 + 2x''_2$$

$$st: \begin{cases} x_1 + x'_2 - x''_2 \geq 1 \\ 3x_1 + 4x'_2 - 4x''_2 = 12 \\ -x_1 + x'_2 - x''_2 \leq 0 \end{cases}$$

$$x_1, x'_2, x''_2 \geq 0$$

تغییر دوم)

$$Min\,Z = x_1 - 2x'_1 + 2x''_2 + MR_1 + MR_2$$

$$st: \begin{cases} x_1 + x'_2 - x''_2 - S_1 + R_1 = 1 \\ 3x_1 + 4x'_2 - 4x''_2 + R_2 = 12 \\ -x_1 + x'_2 - x''_2 + S_2 = 0 \end{cases}$$

$$x_1, x'_2, x''_2, s_1, s_2, R_1, R_2 \geq 0$$

تغییر سوم :

$$Max(-Z) = -x_1 + 2x_1' - 2x_2'' - MR_1 - MR_2$$
$$st: \begin{cases} x_1 + x_2' - x_2'' - S_1 + R_1 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2' - 4x_2'' + R_2 = 12 \\ -x_1 + x_2' - x_2'' + s_2 = 0 \end{cases}$$
$$x_1, x_2', x_2'', s_1, s_2, R_1, R_2 \geq 0$$

$$\Rightarrow$$

$$Max(-Z) + x_1 - 2x_1' + 2x_2'' + MR_1 + MR_2$$
$$st: \begin{cases} x_1 + x_2' - x_2'' + S_1 + R_1 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2' - 4x_2'' + R_2 = 12 \\ -x_1 + x_2' - x_2'' + s_2 = 0 \end{cases}$$
$$x_1, x_2', x_2'', s_1, s_2, R_1, R_2 \geq 0$$

	شماره سطر	X_1	X'_2	X''_2	S_1	R_1	R_2	S_2	R.H.S	
-Z	0	1	-2	2	0	M	M	0	0	0
R_1	1	1	1	-1	-1	1	0	0	1	
R_2	2	3	4	-4	0	0	1	0	12	
S_2	3	-1	1	-1	0	0	0	1	0	
-Z	0	1-4M	-2-5M	2+5M	M	0	0	0	-13M	
R_1	1	1	1	-1	-1	1	0	0	1	$\frac{1}{1}=1$
R_2	2	3	4	-4	0	0	1	0	12	$\frac{12}{4}=3$
S_2	3	-1	1	-1	0	0	0	1	0	$\frac{0}{1}=0$
-Z	0	-1-9M	0	0	M	0	0	2+5M	-13M	
R_1	1	2	0	0	-1	1	0	-1	1	$\frac{1}{2}$
R_2	2	7	0	0	0	0	1	-4	12	$\frac{12}{7}$
x'_2	3	-1	1	-1	0	0	0	1	0	×
-Z	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}-\frac{7}{2}M$	$\frac{1}{2}+\frac{9}{2}M$	0	$\frac{3}{2}+\frac{1}{2}M$	$\frac{1}{2}-\frac{17}{2}M$	
x_1		1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
R_2	2	0	0	0	$\frac{7}{2}$	$-\frac{7}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{17}{2}$	
X'_2	3	0	1	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
-Z	0	0	0	0	0	M	$\frac{1}{7}+M$	$\frac{20}{14}$	$\frac{24}{14}$	
x_1	1	1	0	0	0	0	$\frac{1}{7}$	$-\frac{8}{14}$	$\frac{24}{14}$	
S_1	2	0	0	0	1	-1	$\frac{2}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{17}{7}$	
x'_2	3	0	1	-1	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{6}{14}$	$\frac{24}{14}$	

تکرار ۰

تکرار اصلاح شده

تکرار ۱

تکرار ۲

تکرار ۳

جدول بهینه است

$$-Z^* = \frac{24}{14}$$

جواب جدول:

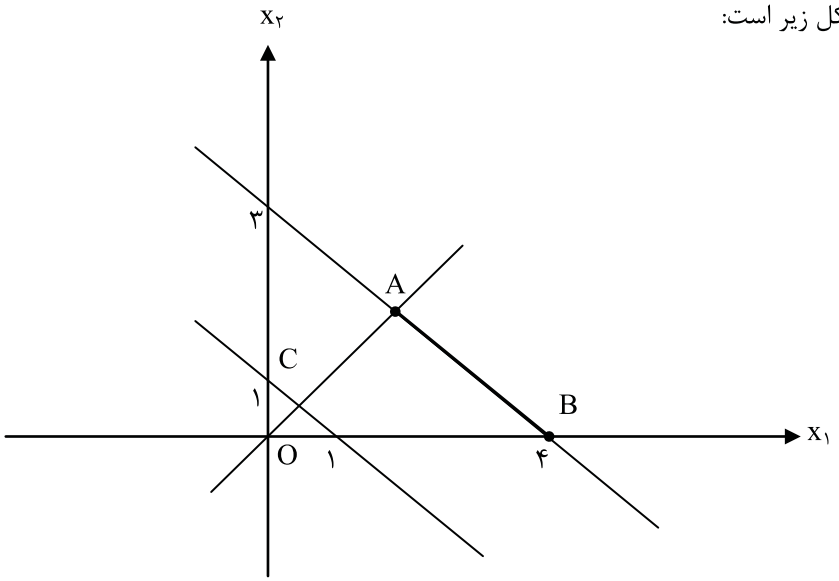
$$X_1^* = \frac{24}{14}, \quad X_2' = \frac{24}{14}$$

بر روی جواب بدست آمده باید تغییراتی به شکل زیر انجام دهیم، تا جواب بهینه مسأله حاصل شود:

$$-z^* = \frac{۲۴}{۱۴}$$
$$X_۱ = \frac{۲۴}{۱۴}$$
$$X'_۲ = \frac{۲۴}{۱۴} \Rightarrow X_۲ = X'_۲ - X''_۲ \rightarrow X_۲ = \frac{۲۴}{۱۴}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z^* = -\frac{۲۴}{۱۴} \\ X_۱^* = \frac{۲۴}{۱۴} \\ X_۲^* = \frac{۲۴}{۱۴} \end{cases}$$

حالت ترسیمی مدل نیز به شکل زیر است:



منطقه موجه پاره خط AB است

تکرار۰ نقطه O را بررسی کرده است.

تکرار۱ نیز نقطه O را بررسی کرده است.(به علت تباهیدگی در این نقطه- حالت خاص تبهگن موقت)

تکرار۲ نقطه C را بررسی کرده است.

تکرار۳ نقطه A را بررسی کرده که همین نقطه، نقطه ی بهینه هم هست.

* توجه : اگر چه نقطه ی O در منطقه ی موجه مسأله قرار ندارد و نباید باعث تباهیدگی شود، اما چون از متغیرهای R استفاده کردیم و این متغیرها منجر به گسترش منطقه موجه می شوند، تباهیدگی در تکرار ۰ و ۱ که هنوز R ها دارای مقدار بودند رخ داد، پس از اینکه وارد منطقه موجه اصلی شدیم، این حالت هم برطرف شد.

-۷

*پارامترهای سطر تابع هدف حالت اولیه، اعداد سمت راست محدودیت های حالت ثانویه هستند، علامت محدودیت ها، با تابع هدف هماهنگ است.

$$\begin{cases} ۲Y_۱ + ۴Y_۲ \geq ۸ \\ ۲Y_۱ + Y_۲ \geq ۶ \end{cases}$$

*چون علامت محدودیت های اولیه «بزرگتر مساوی» است، تمامی متغیرهای مدل ثانویه نیز غیرمنفی خواهند شد.

$$Y_۱, Y_۲ \geq ۰$$

در نتیجه:

$$Min\ Y_o = ۱۰Y_۱ + ۸Y_۲$$
$$st: \begin{cases} ۲Y_۱ + ۴Y_۲ \geq ۸ \\ ۲Y_۱ + Y_۲ \geq ۶ \end{cases}$$
$$Y_۱, Y_۲ \geq ۰$$

ب)

$$Max\ Z - ۸x_۱ - ۶x_۲$$
$$\begin{cases} ۲x_۱ + ۲x_۲ + s_۱ = ۱۰ \\ ۴x_۱ + x_۲ + s_۲ = ۸ \end{cases}$$
$$x_۱, x_۲, s_۱, s_۲ \geq ۰$$

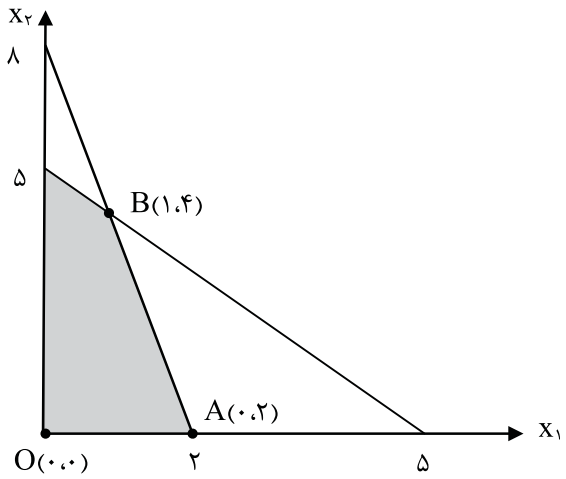
	$X_۱$	$X_۲$	$S_۱$	$S_۲$	
Z	-۸	-۶	۰	۰	۰
$S_۱$	۲	۲	۱	۰	۱۰
$S_۲$	۴	۱	۰	۱	۸
Z	۰	-۴	۰	۲	۱۶
$S_۱$	۰	$\frac{۳}{۲}$	۱	$-\frac{۱}{۲}$	۶
$x_۱$	۱	$\frac{۱}{۴}$	۰	$\frac{۱}{۴}$	۲
Z	۰	۰	$\frac{۸}{۳}$	$\frac{۲}{۳}$	۳۲
$x_۲$	۰	۱	$\frac{۲}{۳}$	$-\frac{۱}{۳}$	۴
$x_۱$	۱	۰	$-\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۳}$	۱

جدول صفر (نقطه o)

جدول یک (نقطه A)

جدول دو (نقطه B)

$$Z^* = ۳۲$$
$$x_۱^* = ۱ \quad , \quad x_۲^* = ۴$$
$$s_۱, s_۲ = ۰$$



ج)

$$\text{Min } Y_o = ۱۰Y_۱ + ۸Y_۲ + MR_۱ + MR_۲ \qquad \text{Max}\left(-Y_o\right) + ۱۰Y_۱ + ۸Y_۲ + MR_۱ + MR_۲$$

$$\begin{cases} ۲Y_۱ + ۴Y_۲ - s_۱ + R_۱ = ۸ \\ ۲Y_۱ + Y_۲ - s_۲ + R_۲ = ۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲Y_۱ + ۴Y_۲ - s_۱ + R_۱ = ۸ \\ ۲Y_۱ + Y_۲ - s_۲ + R_۲ = ۶ \end{cases}$$

$$Y_۱, Y_۲, s_۱, s_۲, R_۱, R_۲ \geq ۰ \qquad Y_۱, Y_۲, s_۱, s_۲, R_۱, R_۲ \geq ۰$$

	$Y_۱$	$Y_۲$	$S_۱$	$S_۲$	$R_۱$	$R_۲$	
$-Y_0$	۱۰	۸	۰	۰	M	M	۰
$R_۱$	۲	۴	-۱	۰	۱	۰	۸
$R_۲$	۲	۱	۰	-۱	۰	۱	۶
$-Y_0$	۱۰-۴M	۸-۵M	M	M	۰	۰	-۱۴M
$R_۱$	۲	۴	-۱	۰	۱	۰	۸
$R_۲$	۲	۱	۰	-۱	۰	۱	۶
$-Y_0$	$۶-\frac{۳}{۲}M$	۰	$۲-\frac{۱}{۴}M$	M	$-۲+\frac{۵}{۴}M$	۰	-۱۶-۴M
$Y_۲$	$\frac{۱}{۲}$	۱	$-\frac{۱}{۴}$	۰	$\frac{۱}{۴}$	۰	۲
$R_۲$	$\frac{۳}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۴}$	-۱	$-\frac{۱}{۴}$	۱	۴
$-Y_0$	۰	۰	۱	۴	$-۱+\frac{۳}{۲}M$	$-۴+M$	-۳۲
$Y_۲$	۰	۱	$-\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$	$-\frac{۱}{۳}$	$\frac{۲}{۳}$
$Y_۱$	۱	۰	$\frac{۱}{۶}$	$-\frac{۲}{۳}$	$-\frac{۱}{۶}$	$\frac{۲}{۳}$	$\frac{۸}{۳}$

جدول صفر

یکه سازی

جدول صفر یکه سازی شده (نقطهO)

جدول یک (نقطه A)

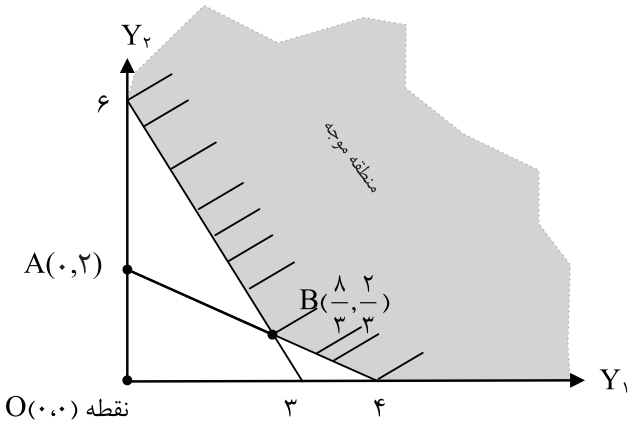
جدول دو (نقطه B)

$$Y^* = ۳۲$$

$$Y_۱^* = \frac{۸}{۳} \ , \ Y_۲^* = \frac{۲}{۳}$$

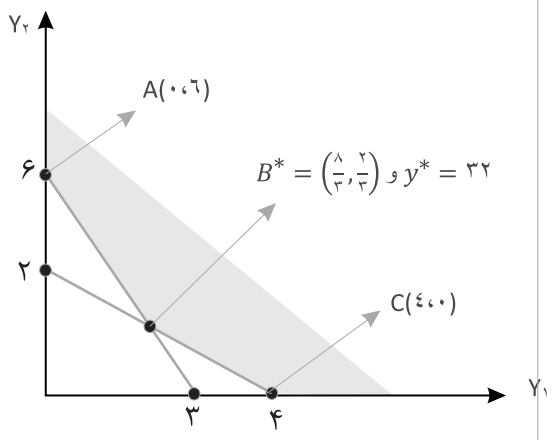
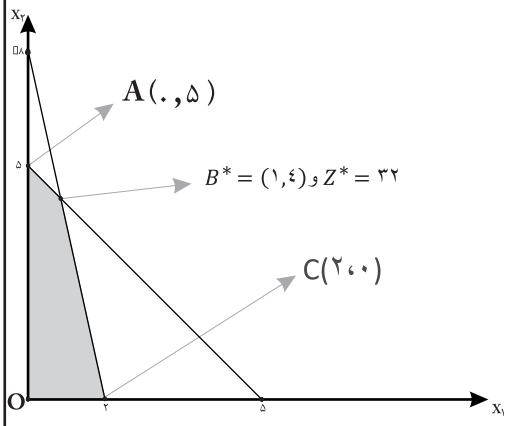
$$s_۱ = s_۲ = R_۱ = R_۲ = ۰$$

حالت ترسیمی:



توجه کنید، زمانی که در نقطه O وA هستیم، منطقه موجه بواسطه ی غیر صفر بودن مقادیرR ، تا آن نقاط گسترش یافته است.

د)مقایسات مربوطه در زیر ارائه شده است:

	ثانویه	اولیه
مدل ها	$\text{Min } Y_0 = 10y_1 + 8y_2$ $\begin{cases} 2y_1 + 4y_2 \geq 8 \\ 2y_1 + y_2 \geq 6 \end{cases}$ $y_1, y_2 \geq 0$	$\text{Max } Z = 8x_1 + 6x_2$ $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ 4x_1 + x_2 \leq 8 \end{cases}$ $x_1, x_2 \geq 0$
حالت ترسیمی		
جداول نهایی سیمپلکس		

	Y_1	Y_2	S_1	S_2	R_1	R_2	
$-Y_0$	۰	۰	۱	۴	$-1+\frac{3}{2}M$	$-4+M$	-32
Y_2	۰	۱	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
Y_1	۱	۰	$\frac{1}{6}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{3}$

	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS
Z	۰	۰	$\frac{8}{3}$	$\frac{2}{3}$	۳۲
X_2	۰	۱	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	۴
X_1	۱	۰	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	۱

۸- الگوریتم سیمپلکس ثانویه (الگوریتم لِمِک[1])

از الگوریتم سیمپلکس ثانویه برای حل مسائلی می توان استفاده کرد که پس از ورود به جدول سیمپلکس، تمامی اعداد سطر صفرشان غیرمنفی باشد (دارای شرایط بهینگی باشند) و در اعداد سمت راست آنها، اعداد منفی وجود داشته باشد (غیرموجه بودن)

بطور خلاصه می توان گفت از این الگوریتم برای حل مسائل غیر موجه و بهینه استفاده می شود.

(دقت کنید که چنین مدلی را عموماً با روش M بزرگ و دو فاز نیز میتوان حل کرد، اما استفاده از این روش، لزوم استفاده از متغیرهای مصنوعی را منتفی می سازد)

گامهای حل مسأله به روش الگوریتم سیمپلکس ثانویه:

۱) مدل را استاندارد کنید.

۲) مدل را وارد جدول کنید.

۳) منفی ترین عدد ستون سمت راست این جدول را انتخاب کرده و سطر مربوطه را سطر لولا بنامید، متغیر اساسی مربوط به این سطر، متغیر خروجی است.

در صورتی که تمام اعداد ستون سمت راست غیرمنفی باشند به جواب بهینه رسیده ایم (شرط موجه بودن برقرار شده است)

۴) اعداد (غیرمنفی) سطر صفر را بر اعداد منفی سطر لولا تقسیم کنید و کوچکترین عدد از نظر قدر مطلق را انتخاب کنید.

ستون مربوطه را ستون لولا بنامید، متغیر مربوط به این ستون متغیر ورودی است.

*اگر تمامی عناصر سطر لولا غیرمنفی باشند مسأله فاقد منطقه موجه است.

۵) عملیات به هنگام کردن را همانند روش سیمپلکس انجام دهید و به گام ۳ بروید.

[1] .Lemke

مثال) آیا مدل زیر را می توان از روش الگوریتم سیمپلکس ثانویه حل کرد؟ چرا؟

در صورت امکان آنرا با روش سیمپلکس ثانویه حل کنید؟

$$Min\ Z = ۱۰x_۱ + ۸x_۲$$
$$\begin{cases} ۲x_۱ + ۴x_۲ \geq ۸ \\ ۲x_۱ + x_۲ \geq ۶ \end{cases}$$
$$x_۱, x_۲ \geq ۰$$

پاسخ:

ابتدا مدل را استاندارد می کنیم و سپس آنرا آماده ورود به جدول می کنیم:

$$\text{Max } (-Z) = -۱۰x_۱ - ۸x_۲ \qquad \Rightarrow \qquad \text{Max } (-Z) + ۱۰x_۱ + ۸x_۲$$

$$\begin{cases} -۲x_۱ - ۴x_۲ \leq -۸ \\ -۲x_۱ - x_۲ \leq -۶ \end{cases} \qquad \begin{cases} -۲x_۱ - ۴x_۲ + s_۱ = -۸ \\ -۲x_۱ - x_۲ + s_۲ = -۶ \end{cases}$$

$$x_۱, x_۲ \geq ۰ \qquad x_۱, x_۲ \geq ۰$$

همانطور که می بینیم این مدل بعد از آماده سازی جهت ورود به جدول سیمپلکس (مدل سمت راست)، دارای شرایط بهینگی بوده (تمام اعداد سطر صفر غیرمنفی هستند) و غیرموجه می باشد (اعداد ستون سمت راست منفی هستند)، از اینرو می توان آنرا از روش سیمپلکس ثانویه حل کرد.

	$X_۱$	$X_۲$	$S_۱$	$S_۲$		
-Z	۱۰	۸	۰	۰	۰	
$S_۱$	-۲	-۴	۱	۰	-۸	جدول صفر
$S_۲$	-۲	-۱	۰	۱	-۶	
Z	۶	۰	۲	۰	-۱۶	
$x_۲$	$\frac{۱}{۲}$	۱	$-\frac{۱}{۴}$	۰	۲	جدول یک
$S_۲$	$-\frac{۳}{۲}$	۰	$-\frac{۱}{۴}$	۱	-۴	
Z	۰	۰	۱	۴	-۳۲	
$x_۲$	۰	۱	$-\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۲}{۳}$	جدول دو
$x_۱$	۱	۰	$\frac{۱}{۶}$	$-\frac{۲}{۳}$	$\frac{۸}{۳}$	
	$Z^* = ۳۲$					
	$x_۱^* = \frac{۸}{۳}, x_۲^* = \frac{۲}{۳}$					
	$s_۱, s_۲ = ۰$					

توضیح حل:

ابتدا مدل را استاندارد کرده و وارد جدول کردیم (گام ۱و۲)

منفی ترین عدد سمت راست (۸-) است، سطر مربوطه را سطر لولا می نامیم و متغیر سطر لولا ($S_۱$) متغیر خروجی خواهد بود (گام ۳)

برای انتخاب متغیر ورودی، اعداد مثبت سطر صفر را بر اعداد منفی سطر لولا تقسیم می کنیم و مینیمم قدر مطلق آنها را انتخاب می‌کنیم. ستون مربوطه را ستون لولا می نامیم و متغیر ستون لولا، متغیر ورودی است. عدد لولا نیز عدد مشترک در سطر و ستون لولاست (گام ۴)

$$\frac{۱۰}{-۲}=-۵ \qquad \frac{۸}{-۴}=-۲ \qquad \mathrm{Min}\{|-۵|,|-۲|\}=۲$$

در نتیجه $x_۲$ متغیر ورودی است.

عملیات به هنگام کردن را انجام می دهیم و جدول شماره یک حاصل می شود.

ادامه حل نیز از همین روند پیروی می کند.

*توجه کنید که مدل ارائه شده برای الگوریتم سیمپلکس ثانویه همان حالت ثانویه ی مثـــال بخش قبلی می باشد که به منظور سادگی، متغیرهای Y_i با X_i نمایش داده شدند. جدول سیمپلکس این مثال را با قسمت ج مثال ۱ مقایسه کنید.

تحلیل حساسیت در روش ترسیمی

۹- تحلیل حساسیت ترسیمی اعداد سمت راست

ممکن است به دلیلی مانند افزایش بودجه بخواهیم منبعی را به منظور بهبود مقدار بهینه تابع هدف افزایش دهیم. مطمئناً در پی آن خواهیم بود که بدانیم کدام منبع جهت افزایش مقدار مناسب تر است و افزایش یک منبع خاص، به چه میزانی درست و منطقی است.

از طرفی ممکن است علاقمند به دانستن این موضوع باشیم که چه مقدار از یک منبع را می توان کاهش داد بدون اینکه موجب تغییری در جواب بهینه فعلی شود.

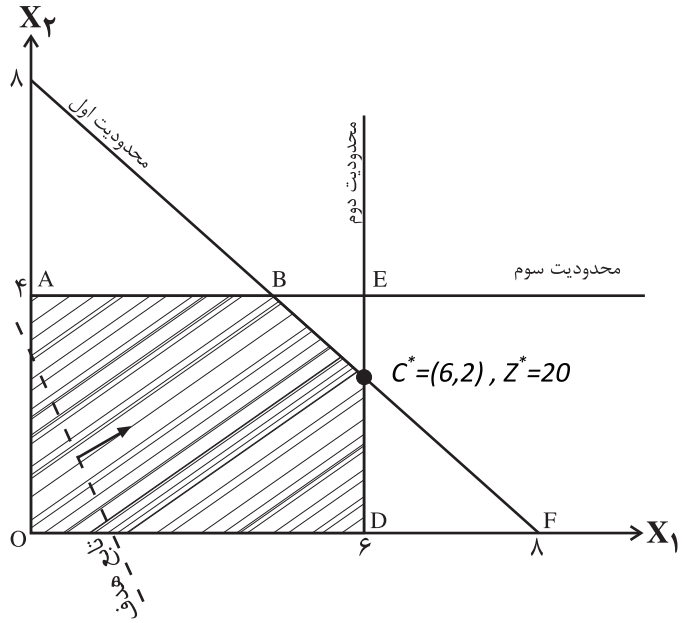
در چنین مواردی به تحلیل حساسیت اعداد سمت راست محدودیت ها می پردازیم.

مثال۱)مدل زیر و حالت ترسیمی آن را در نظر بگیرید

$$\text{Max } Z = ۳x_۱ + x_۲$$

$$\begin{cases} x_۱ + x_۲ \le ۸ & \text{منبع اول} \\ x_۱ \le ۶ & \text{منبع دوم} \\ x_۲ \le ۴ & \text{منبع سوم} \end{cases}$$

$$x_۱, x_۲ \ge ۰$$



در شکل بالا محدودیت اول و دوم الزام آورند و منابعی کمیاب می باشند چون در تولید بهینه C^* هر دو منبع بصورت کامل مصرف شده اند. اما محدودیت سوم محدودیتی غیر الزام آور است و کمیاب نمی باشد.

در صورتی که محدودیت سوم افزایش پیدا کند، منطقه موجه بزرگتر می شود، اما جواب بهینه هیچ تغییری نمی کند. از اینرو برای محدودیت های غیرالزام آور (غیرکمیاب) در پی تعیین این هستیم که «چقدر می توان آنها را کاهش داد که جواب بهینه تغییری نکند».

کاهش محدودیت سوم تا زمانی که این محدودیت از نقطه ی C عبور کند هیچ تأثیری بر جواب بهینه و میزان آن نخواهد گذاشت (شکل شماره ۱). اما کاهش بیشتر موجب الزام آور شدن محدودیت و کاهش مقدار Z خواهد بود. به منظور تعیین میزان کاهش مجاز یک محدودیت غیرالزام آور، مختصات نقطه ی بهینه فعلی را در آن محدودیت قرار داده و عدد سمت راست را محاسبه می کنیم:

$$x_۲ \le ۴ \xrightarrow{\text{کاهش مجاز چقدراست؟}} x_۲ \le ؟ \xrightarrow{x_۱=۶, x_۲=۲} x_۲ \le ۲$$

برای محدودیت هایی که الزام آور هستند، هر کاهش در عدد سمت راست موجب کاهش مقدار جواب بهینه خواهد شد. بعنوان مثال کاهش عدد سمت راست محدودیت دوم به میزان یک واحد $(x_۱ \leq ۵)$ ، مقدار جواب بهینه را از ۲۰ به ۱۸ کاهش می دهد. از اینرو برای محدودیت های الزام آور که بیانگر منابع کمیاب هستند در پی تعیین «میزان افزایش منابع کمیاب به منظور بهبود مقدار تابع هدف» هستیم.

با توجه به مثال ارائه شده، محدودیت دوم تا جایی می تواند حرکت کند (عدد سمت راست آن افزایش یابد) که از نقطه ی (F(۸،۰ عبور کند، انتقال این محدودیت تا نقطه F موجب بهبود تابع هدف می شود (شکل ۲) و در صورت افزایش بیشتر، این محدودیت غیرالزام آور خواهد شد (شکل ۳)

برای تعیین حد افزایش محدودیت دوم(تا جایی که همچنان الزام آور باشد و جواب را بهبود دهد)، مختصات نقطه F را در محدودیت دوم قرار داده و عدد سمت راست را محاسبه می کنیم:

$$x_۱ \leq ۶ \xrightarrow{\text{افزایش مجاز چقدر است؟}} x_۱ \leq ؟ \xrightarrow{x_۱=۸, x_۲=۰} x_۱ \leq ۸$$

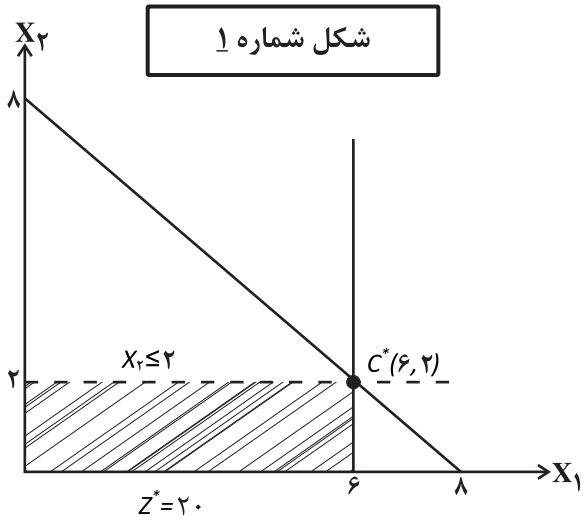
محدودیت اول نیز الزام آور است و حداکثر افزایش مجاز آن تا حدی است که از نقطه E(۶،۴) عبور کند، در نتیجه:

$$x_۱ + x_۲ \leq ۸ \xrightarrow{\text{افزایش مجاز چقد راست؟}} x_۱ + x_۲ \leq ؟ \xrightarrow{x_۱=۶, x_۲=۴} x_۱ + x_۲ \leq ۱۰$$

(شکل شماره ۴)

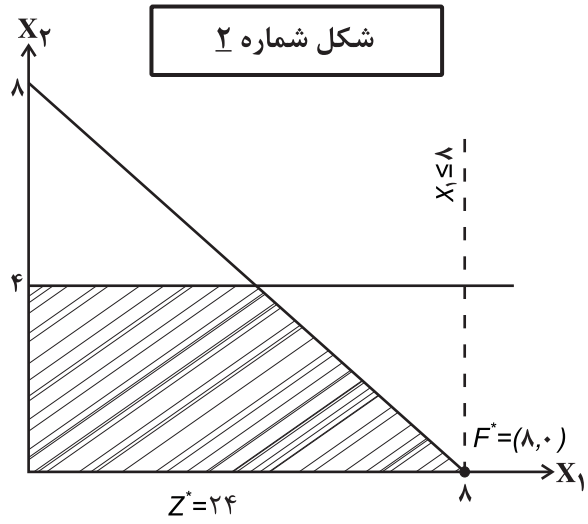
افزایش بیشتر در این منبع نیز موجب غیرالزام آور شدن محدودیت اول می شود (شکل شماره ۵)

شکل شماره ۱



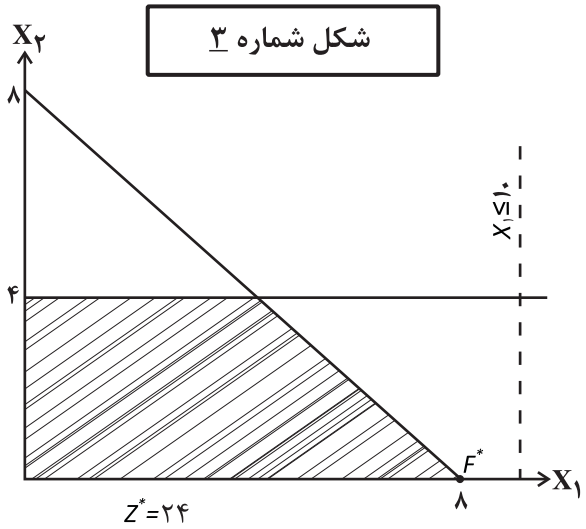
$X_1^* = ۶$ $X_2^* = ۲$

شکل شماره ۲



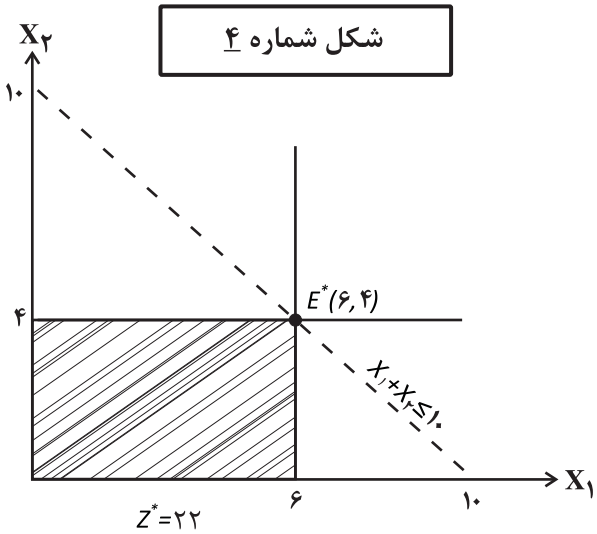
$X_1^* = ۸$ $X_2^* = ۲$

شکل شماره ۳



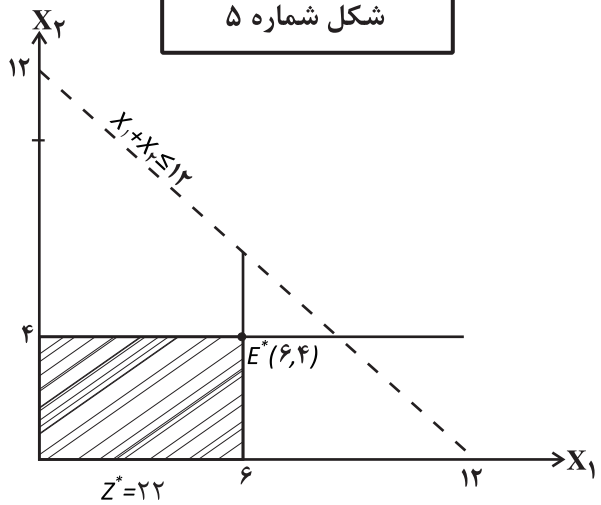
$X_1^* = ۸$ $X_2^* = ۲$

شکل شماره ۴



$X_1^* = ۶$ $X_2^* = ۴$

شکل شماره ۵



$X_1^* = ۶$ $X_2^* = ۴$

جدول زیر یک طبقه بندی از محاسباتی است که انجام شد و تغییر در میزان منابع و تأثیر آنها بر مقدار تابع هدف را نشان می دهد:

منبع	نوع محدودیت (منبع)	حداکثر تغییر در میزان منبع	حداکثر تغییر در میزان Z
اول	الزام آور (کمیاب)	۲= ۸ -۱۰	۲ = ۲۰ -۲۲
دوم	الزام آور(کمیاب)	۲= ۸ -۱۰	۴=۲۰-۲۴
سوم	غیر الزام آور (غیر کمیاب)	۲-=۴-۲	۰ = ۲۰ -۲۰

اگر y_i ارزش هر واحد از منبع i باشد (قیمت سایه)، آنگاه y_i از فرمول زیر بدست می آید:

$$y_i = \frac{\text{حداکثر تغییر در مقدار بهینه } (Z^*)}{\text{افزایش مجاز در منبع } i}$$

محاسبه ی y_i هم در جدول زیر آورده شده است:

منبع	نوع محدودیت (منبع)	y_i
اول	الزام آور (کمیاب)	$\frac{۲}{۲} = ۱$
دوم	الزام آور(کمیاب)	$\frac{۴}{۲} = ۲$
سوم	غیر الزام آور (غیر کمیاب)	۰

در نتیجه افزایش منبع دوم نسبت به دو منبع دیگر بهتر و به صرفه است.

حال فرض کنید می خواهیم برای اعداد سمت راست هر یک از محدودیت ها، دامنه ای تعیین کنیم که عدد سمت راست هر محدودیت در دامنه مربوطه اش بتواند تغییر کند، بدون اینکه با جواب بهینه ی جدیدی مواجه بشویم (یعنی متغیرهای اساسی عوض نشوند)

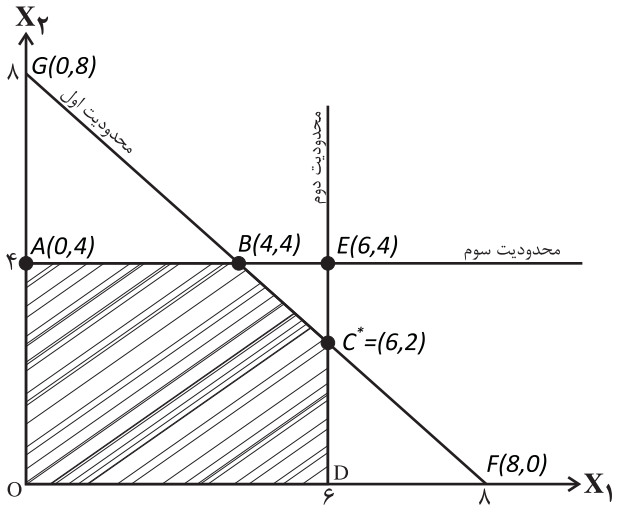
دامنه ی تغییرات مجاز عدد سمت راست یک محدودیت الزام آور، حوزه ای است که آن محدودیت همچنان الزام آور باقی بماند.

مثال قبل را مجدداً در نظر بگیرید

$$\text{Max } Z = ۳x_۱ + x_۲$$

$$\begin{cases} x_۱ + x_۲ \le ۸ \\ x_۱ \le ۶ \\ x_۲ \le ۴ \end{cases}$$

$$x_۱, x_۲ \ge ۰$$



محدودیت اول می تواند به موازات خود تا جایی بالا رود که از نقطه ی E عبور نماید و تا جایی پائین بیاید که از نقطه D عبور کند، یعنی در این دامنه از تغییر، محدودیت های الزام آور قبلی همچنان الزام آورند و متغیرهای اساسی تغییر نمیکنند.

برای آنکه محدودیت اول از نقطه D عبور کند، مختصات نقطه ی D را در معادله ی محدودیت اول قرار می دهیم:

$$D(۶,۰) \longrightarrow x_۱ + x_۲ = ? \xrightarrow{(۶,۰)} ۶ + ۰ = ۶$$

(یعنی اگر عدد سمت راست محدودیت اول ۶ باشد $(X_۱ + X_۲ \le ۶)$، این محدودیت از نقطه ی D عبور می کند و برای نقطه E نیز به همین صورت عمل می کنیم:

$$E(۶,۴) \longrightarrow x_۱ + x_۲ = ? \xrightarrow{(۶,۴)} ۶ + ۴ = ۱۰$$

پس اگر عدد سمت راست محدودیت اول بین ۶ تا ۱۰ تغییر کند، این محدودیت همچنان الزام آور است.

از اینرو می گوئیم دامنه ی مجاز $b_۱$ بصورت مقابل است : $۶ \le b_۱ \le ۱۰$

$b_۱$ در این مثال ۸ است، ما ممکن است بخواهیم تغییرات $b_۱$ را نسبت به وضعیت موجود ($b_۱$=۸) بسنجیم، در این حالت می گوئیم دامنه ی مجاز تغییرات $b_۱$ $(\Delta b_۱)$ بصورت زیر است:

$$۶ - b_۱ \le b_۱ \le ۱۰ - b_۱ \Rightarrow -۲ \le \Delta b_۱ \le ۲$$

دامنه مجاز تغییرات عدد سمت راست محدودیت دوم تا جایی است که بواسطه کاهش عدد سمت راستش،از نقطه B و یا بواسطه افزایش عدد سمت راستش از F عبور کند.

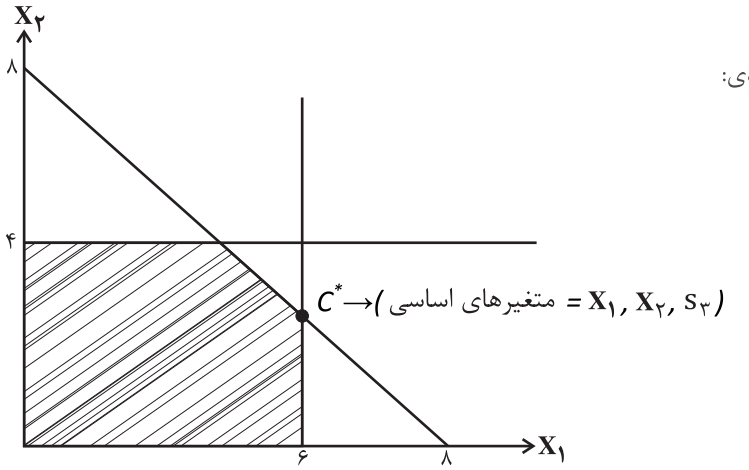
پس داریم: $B(۴،۴) \longrightarrow x_۱ = ? \xrightarrow{(۴،۴)} x_۱ = ۴ \longrightarrow x_۱ \leq ۴$

و همینطور: $F(۸،۰) \longrightarrow x_۱ = ? \xrightarrow{(۸،۰)} x_۱ = ۸ \longrightarrow x_۱ \leq ۸$

پس داریم: $-۲ \leq \triangle b_۲ \leq ۲$ **ویا** $۴ \leq b_۲ \leq ۸$

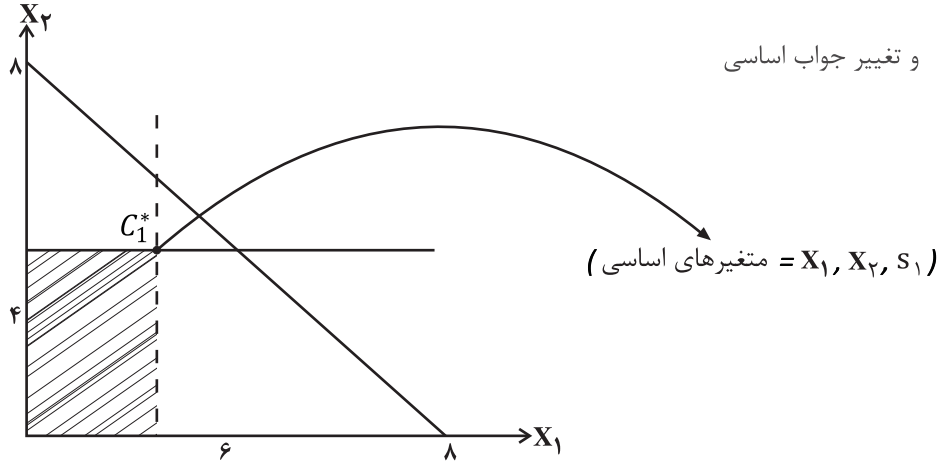
توجه داشته باشید که اگر این تغییر در عدد سمت راست،بیشتر از دامنه فوق باشد،جواب اساسی تغییر می کند:

حالت عادی:

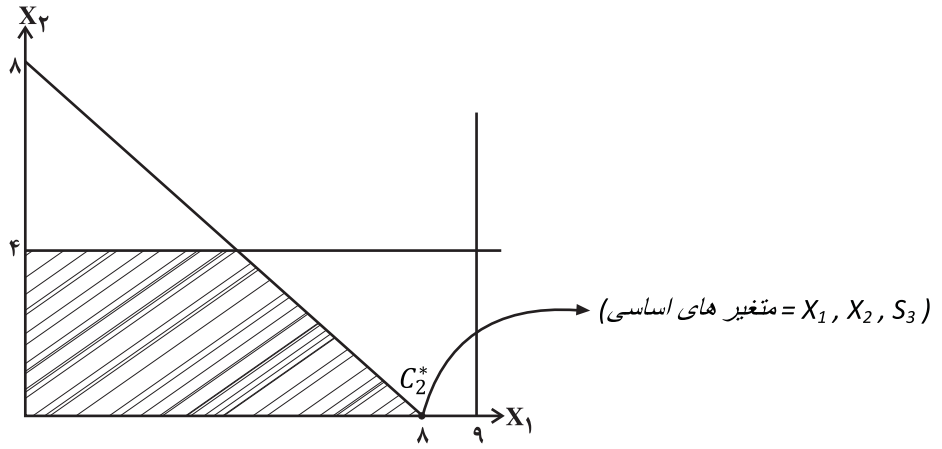


کاهش عدد سمت راست محدودیت دوم به عدد۳ :

و تغییر جواب اساسی



افزایش عدد سمت راست محدودیت دوم به ۹



محدودیت سوم،محدودیتی غـــــــیرالزام آور است،افزایش عدد سمت راست این محدودیت هیچ تاثیری بر جواب ندارد،اما کاهش عدد سمت راست این محدودیت تا جایی مجاز است که معادله این محدودیت از نقطه C عبور کند،یعنی:

$$x_۲ \leq ۴ \xrightarrow{C(۶،۲)} x_۲ = ۲ \longrightarrow x_۲ \leq ۲$$

پس داریم:

$$۲ \leq b_۳ \leq \infty \qquad \text{ویا} \qquad -۲ \leq \triangle b_۳ \leq \infty$$

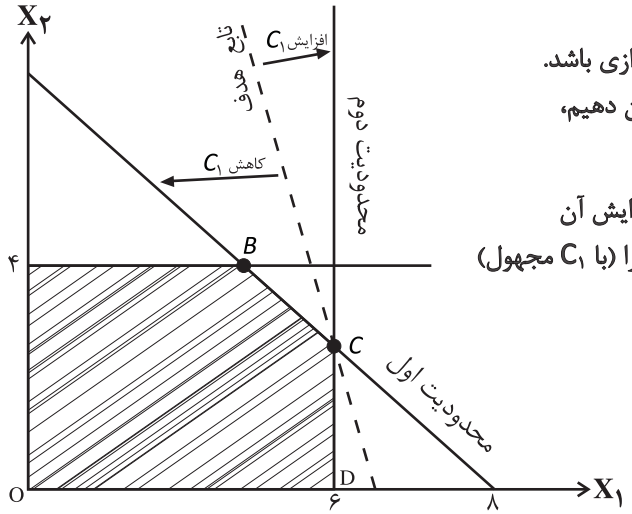
توجه داشته باشید که کاهش عدد سمت راست محدودیت‌های غیر الزام آور، تا مرز الزام آور شدنشان هیچ تاثیری بر متغیرهای اساسی و مقدارشان و در نتیجه در مقدار Z^* ندارد.

۱۰- تحلیل حساسیت ترسیمی ضرائب تابع هدف

در این بخش می خواهیم بدانیم تغییرات ضرائب تابع هدف در چه دامنه ای موجب تغییر نقطه بهینه نمی شوند. (تغییرات مجاز).

اگر تغییرات ضرایب تابع هدف از تغییرات مجاز محاسبه شده بیشتر باشد،نقطه بهینه تغییر کرده و بر الزام آور بودن یا غیر الزام آور بودن منابع تاثیر می گذارد.

***توجه کنید که تغییرات ضرایب تابع هدف در محدوده مجاز،می تواند موجب تغییر مقدار جواب بهینه (Z^*) گردد اما متغیرهای اساسی تغییر نمی کنند.**
با تغییر ضرایب خارج از محدوده مجاز،متغیرهای اساسی نیز تغییر می کند.
مجددا مثال ۱ را در نظر بگیرید. می خواهیم بدانیم ضریب متغیر x_1 در تابع هدف (C_1) در چه دامنه ای می تواند تغییر کند که نقطه بهینه تغییر نکند. (دامنه مجاز تغییرات C_1)
هر چه مقدار C_1 بیشتر شود،شیب تابع هدف بیشتر می شود و هر چه مقدار C_1 کمتر شود،شیب تابع هدف نیز کمتر می شود.
با توجه به شکل مقابل،
مقدار C_1 تا جایی می تواند افزایش یابد که با محدودیت دوم موازی باشد.
اگر تابع هدف را به صورت $Max\ Z = C_1x_1 + C_2x_2$ نشان دهیم،
$\frac{C_1}{C_2}$ شیب تابع هدف است؛
از آنجایی که در پی تعیین دامنه مجاز C_1 هستیم و حداکثر افزایش آن تا جایی است که موازی محدودیت دوم شود، شیب تابع هدف را (با C_1 مجهول) مساوی با شیب محدودیت دوم قرار می دهیم:



افزایش C_1: $C_1=\infty$ $\Longrightarrow$ $\frac{C_1}{1} = \infty$

همچنین C_1 تا جایی می تواند کاهش یابد که با محدودیت اول موازی باشد،در نتیجه:

کاهش C_1 : $C_1=1$ $\Longrightarrow$ $\frac{C_1}{1} = \frac{1}{1} = 1$

در نتیجه: $1 \le C_1 \le \infty$ ویا $-2 \le \Delta C_1 \le \infty$

کاهش C_1 بیشتر از مقدار دامنه مجاز، موجب می شود که نقطه بهینه تغییر کند (نقطه B بهینه شود)؛ و افزایش خارج از دامنه C_1 موجب بهینه شدن نقطه D می شود.

دامنه مجاز تغییرات C_2 : تعیین دامنه مجاز تغییرات C_2 نیز مانند C_1 است. با این تفاوت که افزایش C_2 موجب کاهش شیب خط تابع هدف می شود و این افزایش(C_2) تا جایی مجاز خواهد بود که تابع هدف موازی محدودیت اول شود.

همچنین کاهش $C_۲$ موجب افزایش شیب خط تابع هدف می شود و کاهش $C_۲$ تا جایی مجاز است که تابع هدف موازی محدودیت دوم شود. (در غیر اینصورت B یا D بهینه می شوند)؛ در نتیجه:

افزایش $C_۲$: $C_۲=۳$ $\Longrightarrow$ $\frac{۳}{C_۲} = \frac{۱}{۱}$

کاهش $C_۲$: $C_۲=۰$ $\Longrightarrow$ $\frac{۳}{C_۲} = \infty$

در نتیجه: $۰ \leq C_۲ \leq ۳$ ویا $-۱ \leq \Delta C_۲ \leq ۲$

۱۱- برنامه ریزی پارامتری برای ضرایب تابع هدف

مثال مسأله زیر را در نظر بگیرید، برای این مسأله برنامه ریزی پارامتری را انجام دهید.

$$Max\ Z = (۴+\theta)x_۱ + (۱+۴\theta)x_۲ + (۵+۴\theta)x_۳$$

$$\begin{cases} ۲x_۱ + ۲x_۲ + ۴x_۳ \leq ۱۸ \\ \quad\quad ۶x_۲ + ۲x_۳ \leq ۲۰ \end{cases}$$

$$x_۱ , x_۲ , x_۳ \geq ۰$$

تابع هدف پارامتری: $Max\ Z = (۴+\theta)x_۱ + (۱+۴\theta)x_۲ + (۵+۴\theta)x_۳$

حل:

ابتدا مسأله را به ازای $\theta = ۰$ حل می کنیم، در اینصورت جدول نهایی بصورت زیر خواهد بود:

	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$S_۱$	$S_۲$	
Z	۰	۳	۳	۲	۰	۳۶
$x_۱$	۱	۱	۲	$\frac{۱}{۲}$	۰	۹
$S_۲$	۰	۶	۲	۰	۱	۲۰

مقادیر θ را غیر صفر در نظر می گیریم، در این حال بدیهی است که اعداد سطر صفر جدول بهینه تغییر می کنند، این مقادیر را محاسبه کرده (با روابط بین جداول سیمپلکس) و وارد جدول نهایی می کنیم، اگر جدول نیاز به یکه سازی پیدا کرد، آنرا یکه می کنیم:

$$\bar{C}_j = Z_j - C_j = y^*.P_j - C_j$$

$$\bar{C}_۱ = [۲ , ۰].\begin{bmatrix} ۲ \\ ۰ \end{bmatrix} - (۴+\theta) = -\theta$$

$$\bar{C}_۲ = [۲ , ۰].\begin{bmatrix} ۲ \\ ۶ \end{bmatrix} - (۱+۴\theta) = ۳ - ۴\theta$$

$$\bar{C}_۳ = [۲ , ۰].\begin{bmatrix} ۴ \\ ۲ \end{bmatrix} - (۵+۴\theta) = ۳ - ۴\theta$$

	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$S_۱$	$S_۲$	
Z	$-\theta$	$۳-۴\theta$	$۳-۴\theta$	۲	۰	۳۶
$x_۱$	۱	۱	۲	$\frac{۱}{۲}$	۰	۹
$S_۲$	۰	۶	۲	۰	۱	۲۰
Z	۰	$۳-۳\theta$	$۳-۲\theta$	$۲+\frac{۱}{۲}\theta$	۰	$۳۶+۹\theta$
$x_۱$	۱	۱	۲	$\frac{۱}{۲}$	۰	۹
$S_۲$	۰	۶	۲	۰	۱	۲۰

یکه سازی

حال دامنه ی مجاز برای θ را محاسبه می کنیم:

$$\begin{cases} ۳-۳\theta \geq ۰ \\ ۳-۲\theta \geq ۰ \\ ۲+\frac{۱}{۲}\theta \geq ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta \leq ۱ \\ \theta \leq \frac{۳}{۲} \\ \theta \geq -۴ \end{cases} \Rightarrow \boxed{-۴ \leq \theta \leq ۱}$$

حد بالا را برای θ در نظر می گیریم ($\theta = ۱$)، در این حال متغیر $x_۲$ ورودی می گردد (گام ۳)، با ورودی شدن $x_۲$، متغیر خروجی را نیز بصورت معمولی انتخاب کرده و یک جدول به پیش می رویم:

	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$S_۱$	$S_۲$	
Z	۰	$۳-۳\theta$	$۳-۲\theta$	$۲+\frac{۱}{۲}\theta$	۰	$۳۶+۹\theta$
$x_۱$	۱	۱	۲	$\frac{۱}{۲}$	۰	۹
$S_۲$	۰	۶	۲	۰	۱	۲۰
Z	۰	۰	$۲-\theta$	$۲+\frac{۱}{۲}\theta$	$-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\theta$	$۲۶+۱۹\theta$
$x_۱$	۱	۰	$\frac{۵}{۳}$	$\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱۷}{۳}$
$x_۲$	۰	۱	$\frac{۱}{۳}$	۰	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱۰}{۳}$

سطر صفر جدول قبل + $(-۳+۳\theta)\times$

برای جدول جدید، دامنه θ را محاسبه می نمائیم:

$$\begin{cases} ۲-\theta \geq ۰ \\ ۲+\frac{۱}{۲}\theta \geq ۰ \\ -\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\theta \geq ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta \leq ۲ \\ \theta \geq -۴ \\ \theta \geq ۱ \end{cases} \Rightarrow \boxed{۱ \leq \theta \leq ۲}$$

حد بالا را برای θ در نظر می گیریم ($\theta = ۲$)، در این حال $x_۳$ ورودی و $x_۱$ خروجی می گردد، داریم:

	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$S_۱$	$S_۲$	
Z	۰	۰	$۲-\theta$	$۲+\frac{۱}{۲}\theta$	$-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\theta$	$۲۶+۱۹\theta$
$x_۱$	۱	۰	$\frac{۵}{۳}$	$\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱۷}{۳}$
$x_۲$	۰	۱	$\frac{۱}{۳}$	۰	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱۰}{۳}$
Z	$-\frac{۶}{۵}+\frac{۳}{۵}\theta$	۰	۰	$\frac{۷}{۵}+\frac{۴}{۵}\theta$	$-\frac{۳}{۱۰}+\frac{۲}{۵}\theta$	$\frac{۹۶}{۵}+\frac{۱۱۲}{۵}\theta$
$x_۳$	$\frac{۳}{۵}$	۰	۱	$\frac{۳}{۱۰}$	$-\frac{۱}{۱۰}$	$\frac{۱۷}{۵}$
$x_۲$	$-\frac{۱}{۵}$	۱	۰	$-\frac{۱}{۱۰}$	$\frac{۲}{۱۵}$	$\frac{۳۳}{۱۵}$

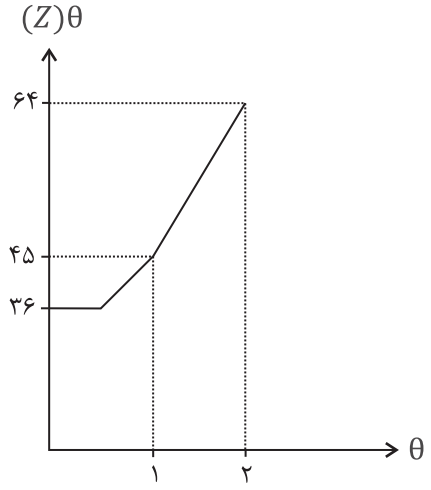
برای جدول جدید دامنه θ را محاسبه می کنیم:

$$\begin{cases} -\frac{۶}{۵}+\frac{۳}{۵}\theta \geq ۰ \\ \frac{۷}{۵}+\frac{۴}{۵}\theta \geq ۰ \\ -\frac{۳}{۱۰}+\frac{۲}{۵}\theta \geq ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta \geq ۲ \\ \theta \geq -\frac{۷}{۴} \\ \theta \geq \frac{۳}{۴} \end{cases} \Rightarrow \theta \geq ۲$$

θ حد بالا ندارد و محاسبات به پایان می رسد.

رابطه θ و $(Z)\theta$ در این مثال، بصورت زیر است:

θ	$(Z)\theta$	توضیح
۰	۳۶	جدول اول
۱	۴۵	جدول دوم (جایگذاری $\theta = ۱$ در $۲۶ + ۱۹\theta$)
۲	۶۴	جدول سوم (جایگذاری $\theta = ۲$ در $\frac{۹۶}{۵} + \frac{۱۱۲}{۵}\theta$)



۱۲- برنامه ریزی پارامتری اعداد سمت راست

برای مدل زیر، تحلیل پارامتریک مربوطه را انجام دهید.

$$Max\ Z = ۴x_۱ + ۳x_۲ + ۶x_۳$$
$$\begin{cases} ۳x_۱ + x_۲ + ۳x_۳ \leq ۳۰ - \theta \\ ۲x_۱ + ۲x_۲ + ۳x_۳ \leq ۴۰ + ۲\theta \end{cases}$$
$$x_۱, x_۲, x_۳ \geq ۰$$

پاسخ:

ابتدا مدل را به ازای $\theta = ۰$ حل می کنیم، در این حال جدول نهایی بصورت زیر خواهد بود:

	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$S_۱$	$S_۲$	RHS
Z	۱	۰	۰	۱	۱	۷۰
$x_۳$	$\frac{۴}{۳}$	۰	۱	$\frac{۲}{۳}$	$-\frac{۱}{۳}$	$\frac{۲۰}{۳}$
$x_۲$	-۱	۱	۰	-۱	۱	۱۰

سپس θ را غیر صفر در نظر گرفته و با استفاده از روابط بین جداول، آنرا وارد جدول نهایی می کنیم:

$$\bar{b} = B^{-۱}.b \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{۲}{۳} & -\frac{۱}{۳} \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ۳۰ - \theta \\ ۴۰ + ۲\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۲۰}{۳} - \frac{۴}{۳}\theta \\ ۱۰ + ۳\theta \end{bmatrix}$$

	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$S_۱$	$S_۲$	RHS
Z	۱	۰	۰	۱	۱	$۷۰ + \theta$
$x_۳$	$\frac{۴}{۳}$	۰	۱	$\frac{۲}{۳}$	$-\frac{۱}{۳}$	$\frac{۲۰}{۳} - \frac{۴}{۳}\theta$
$x_۲$	-۱	۱	۰	-۱	۱	$۱۰ + ۳\theta$

θ را تعیین دامنه می کنیم:

$$\begin{cases} \frac{۲۰}{۳} - \frac{۴}{۳}\theta \geq ۰ \\ ۱۰ + ۳\theta \geq ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta \leq ۵ \\ \theta \geq -\frac{۱۰}{۳} \end{cases} \Rightarrow \boxed{-\frac{۱۰}{۳} \leq \theta \leq ۵}$$

اگر $\theta > ۵$ شود، مقدار متغیر اساسی $x_۳$ منفی شده و برای بدست آوردن جواب دیگر باید مسأله را با روش سیمپلکس ثانویه حل کرد، همین کار را می کنیم، داریم:

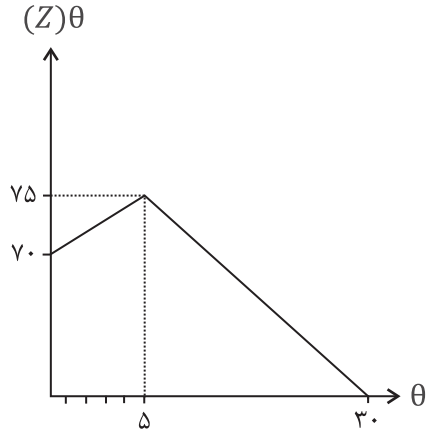
	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$S_۱$	$S_۲$	RHS
Z	۱	۰	۰	۱	۱	$۷۰ + \theta$
$x_۳$	$\frac{۴}{۳}$	۰	۱	$\frac{۲}{۳}$	$-\frac{۱}{۳}$	$\frac{۲۰}{۳} - \frac{۴}{۳}\theta$
$x_۲$	-۱	۱	۰	-۱	۱	$۱۰ + ۳\theta$
Z	۵	۰	۳	۳	۰	$۹۰ - ۳\theta$
$S_۲$	-۴	۰	-۳	-۲	۱	$-۲۰ + ۴\theta$
$x_۲$	۳	۱	۳	۱	۰	$۳۰ - ۱\theta$

برای جدول جدید θ را تعیین می کنیم:

$$\begin{cases} -۲۰ + ۴\theta \geq ۰ \\ ۳۰ - \theta \geq ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta \geq ۵ \\ \theta \leq ۳۰ \end{cases}$$

حد بالا برای θ، ۳۰ است و اگر $\theta > ۳۰$ باشد، متغیر $x_۲$ خروجی می گردد، همین کار را می کنیم، اما چون هیچ عدد منفی در سطر مربوطه وجود ندارد امکان انتخاب متغیر ورودی وجود ندارد، از اینرو در همین مرحله برنامه ریزی پارامتریک، پایان می یابد. رابطه تغییرات $Z(\theta)$ بر اثر تغییرات θ بصورت زیر است:

θ	$Z(\theta)$	توضیح
۰	۷۰	جدول اول
۵	۷۵	جدول دوم
۳۰	-	جدول سوم



۱۳- الگوریتم سیمپلکس تجدید نظر شده

مثال. مدل زیر را با استفاده از روش سیمپلکس تجدیدنظر شده حل کنید.

$$Max\ \ Z = ۴x_۱ + ۳x_۲ + ۶x_۳$$

$$\begin{cases} ۳x_۱ + x_۲ + ۳x_۳ \le ۳۰ \\ ۲x_۱ + ۲x_۲ + ۳x_۳ \le ۴۰ \end{cases}$$

$$x_۱, x_۲, x_۳ \ge ۰$$

ابتدا مدل را برای حل آماده می کنیم و سپس آنرا به شکل ماتریسی می نویسیم:

$$Max\ \ Z - ۴x_۱ - ۳x_۲ - ۶x_۳$$

$$\begin{cases} ۳x_۱ + x_۲ + ۳x_۳ + s_۱ = ۳۰ \\ ۲x_۱ + ۲x_۲ + ۳x_۳ + s_۲ = ۴۰ \end{cases}$$

$$x_۱, x_۲, x_۳, s_۱, s_۲ \ge ۰$$

$$x_N = (x_۱, x_۲, x_۳) \qquad x_B = (s_۱, s_۲) \qquad A = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۳ \\ ۲ & ۲ & ۳ \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} ۳۰ \\ ۴۰ \end{bmatrix}$$

$$C_N = (-۴, -۳, -۶) \qquad C_B = (۰, ۰)$$

↑ ضریب متغیرهای غیر اساسی در تابع هدف

↑ ضریب متغیرهای اساسی در تابع هدف

↑ ضرایب فنی

↑ اعداد سمت راست

تکرار صفر

گام ۱- در اولین تکرار (تکرار صفر) متغیر ورودی نیاز به محاسبات ندارد و با توجه به عدد (۶-) متغیر $X_۳$ ورودی می باشد.

گام ۲- برای تعیین متغیر خروجی نیز در تکرار صفر نیاز به محاسبات خاصی نداریم و بصورت زیر عمل می کنیم:

$$\frac{۳۰}{۱۰}=۱۰$$
$$\frac{۴۰}{۳}=۱۳/۳$$

در نتیجه سطر اول که مربوط به $S_۱$ می باشد خروجی است.

گام ۳- با توجه به اینکه $S_۱$ خروجی است (r=۱)، ستون اول (r ام) ماتریس $B^{-۱}$ موجود غیراساسی شده است، در نتیجه ماتریس E بصورت زیر محاسبه می شود:

اول ستون $\overline{P}_۳$ جدول جدید محاسبه می شود:

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۳ \\ ۳ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ۳ \\ ۳ \end{pmatrix}$$

سپس برای ستون فوق:

$$\text{ستون سازه}=\begin{bmatrix} \text{معکوس (سطر r ام)} \\ -\dfrac{\text{عنصر دوم}}{\text{عنصر اول (r ام)}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} \\ -۱ \end{bmatrix}$$

و این ستون را جای ستون اول (r ام) ماتریس یکّه قرار می دهیم:

$$E=\begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} & ۰ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

و با استفاده از رابطه زیر، $B^{-۱}$ جدید را بدست می آوریم:

$$B_{new}^{-۱}=E.B_{old}^{-۱}$$
$$B_{new}^{-۱}=\begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} & ۰ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} & ۰ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

با توجه به اینکه $X_۳$ ورودی شد، متغیرهای اساسی جدید به شکل زیر خواهند بود:

$$X_B=(x_۳,S_۲)$$

تکرار یک

گام ۱-برای تعیین متغیر ورودی، ضرایب متغیرهای غیر اساسی در تابع هدف را باید محاسبه کنیم:

$$x_j = (x_۱, x_۲, s_۱)$$

$$\overline{C}_j = C_B.B^{-۱}.N_j - C_j \Rightarrow (۶,۰).\begin{pmatrix} \frac{۱}{۳} & ۰ \\ -۱ & ۱ \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} ۳ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۲ & ۰ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ۴ & ۳ & ۰ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۲ & -۱ & ۲ \end{pmatrix}$$

پس متغیر ورودی ، متغیر $X_۲$ می باشد.

گام ۲- برای تعیین متغیر خروجی، ستون سمت راست و ستون مربوط به متغیر $X_۲$ را محاسبه می کنیم:

$$\overline{P}_j = B^{-۱}.P_j \Rightarrow .\begin{pmatrix} \frac{۱}{۳} & ۰ \\ -۱ & ۱ \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{۱}{۳} \\ ۱ \end{pmatrix}$$

$$\overline{b} = B^{-۱}.b \Rightarrow .\begin{pmatrix} \frac{۱}{۳} & ۰ \\ -۱ & ۱ \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} ۳۰ \\ ۴۰ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱۰ \\ ۱۰ \end{pmatrix}$$

با توجه به $\begin{bmatrix} \frac{۱۰}{\frac{۱}{۳}} = ۳۰ \\ \frac{۱۰}{۱} = ۱۰ \end{bmatrix}$ و اینکه $x_B = \begin{bmatrix} x_۳ \\ s_۲ \end{bmatrix}$ است، متغیر $S_۲$ خروجی می باشد. (r=۲ چون سطر دوم خروجی شد)

گام ۳- چون ستون ماتریس $B^{-۱}$ قدیمی خروجی شد، ماتریس E بصورت زیر محاسبه می گردد:

اول ستون $\overline{P}_۲ = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} \\ ۱ \end{bmatrix}$ را نوشته و می دانیم r=۲ است. سپس:

$$\text{ستون سازه} = \begin{bmatrix} -\frac{\text{عنصر اول}}{\text{عنصر دوم}} \\ \text{معکوس(سطر r ام)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{۱}{۳} \\ ۱ \end{bmatrix}$$

و این ستون را جای ستون دوم ماتریس یکّه قرار می دهیم:

$$E = \begin{bmatrix} ۱ & -\frac{۱}{۳} \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

و داریم:

$$B^{-۱}_{new} = E.B^{-۱}_{old} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & -\frac{۱}{۳} \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} & ۰ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۲}{۳} & -\frac{۱}{۳} \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

با ت جه به دی شدن $X_۲$ و خروج $S_۲$، متغیرهای اساسی جدول جدید عبارتند از : $x_B = (x_۳, x_۲)$

تکرار۲-

گام ۱-

$$x_j = (x_۱, s_۱, s_۲)$$

$$\overline{C}_j = C_B.B^{-۱}.N_j - C_j \Rightarrow (۶,۳)\begin{pmatrix} \frac{۲}{۳} & -\frac{۱}{۳} \\ -۱ & ۱ \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} ۳ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۰ & ۱ \end{pmatrix} - (۴,۰,۰) = (۱,۱,۱)$$

چون همه ی ضرایب متغیر های غیر اساسی در سطر صفر این تکرار منفی هستند، جدول بهینه است. از اینرو جواب را محاسبه می کنیم:

$$x_B = (x_۳, x_۲)$$

$$X_B = \overline{b} = B^{-۱}.b \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{۲}{۳} & -\frac{۱}{۳} \\ -۱ & ۱ \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} ۳۰ \\ ۴۰ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{۲۰}{۳} \\ ۱۰ \end{pmatrix}$$

$$Z.C_B.B^{-۱}.b \Rightarrow (۶,۳)\begin{pmatrix} \frac{۲}{۳} & -\frac{۱}{۳} \\ -۱ & ۱ \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} ۳۰ \\ ۴۰ \end{pmatrix} = ۷۰$$

در نتیجه داریم:

$$X_۱^* = ۰ \quad , x_۲^* = ۱۰ \quad , x_۳^* = \frac{۲۰}{۳} \ , \ z^* = ۷۰$$

جهت مقایسه، حل مدل قبلا از طریق سیمپلکس هم ارائه شده است:

	$X_۱$	$X_۲$	$X_۳$	$S_۱$	$S_۲$	RHS
Z	-۴	-۳	-۶	۰	۰	۰
$S_۱$	۳	۱	۳	۱	۰	۳۰
$S_۲$	۲	۲	۳	۰	۱	۴۰
Z	۲	-۱	۰	۲	۰	۶۰
$X_۳$	۱	$\frac{۱}{۳}$	۱	$\frac{۱}{۳}$	۰	۱۰
$S_۲$	-۱	۱	۰	-۱	۱	۱۰
Z	۱	۰	۰	۱	۱	۷۰
$X_۳$	$\frac{۴}{۳}$	۰	۱	$\frac{۲}{۳}$	$-\frac{۱}{۳}$	$\frac{۲۰}{۳}$
$X_۲$	-۱	۱	۰	-۱	۱	۱۰
	جدول بهینه است $x_۲^* = ۱۰ \quad , x_۳^* = \frac{۲۰}{۳} \ , \ z^* = ۷۰$					

۱۴- فن حد فوقانی

مثال) مسأله زیر با استفاده از روش فن حد فوقانی حل کنید

$$Max\ z = 2\,x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 9 \\ x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_2 \le \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$x_1\ ,x_2 \ge ۰$$

ابتدا باری دیگر گامهای این روش را مرور می کنیم:

گام اول – جدول سیمپلکس را به طور معمولی پر کنید ولی محدودیت های دارای حد فوقانی را وارد جدول نکنید

گام دوم – متغیر اساسی ورودی را انتخاب کنید

گام سوم – برای انتخاب متغیر خروجی موارد زیر را محاسبه کنید:

U_j ← حد بالای متغیر ورودی

θ_i : این مورد در صورتی محاسبه می شود که a_{ij} (یعنی عدد مورد بررسی در ستون لولا) مثبت باشد. در این حال این نسبت را به صورت زیر محاسبه می کنیم:

$$\theta_i = \frac{b_i}{a_{ij}}$$

α_i : این مورد در صورتی محاسبه می شود که a_{ij} منفی باشد. در این حال این نسبت را به صورت زیر محاسبه می کنیم.

$$\alpha_i = \frac{U_i - b_i}{-a_{ij}}$$

(توجه داشته باشید که در این نسبت، U_i حد بالای متغیر سطر مورد بررسی می باشد)

در این زمان سه حالت زیر ممکن است رخ دهد:

حالت ۱) حداقل موارد θ_i باشد ← در این صورت سیمپلکس را به صورت عادی یک تکرار حل کنید

حالت ۲) حداقل موارد α_i باشد ← در این صورت برای متغیر سطر مربوطه تغییر متغیر داده و پس از اعمال در جدول به گام ۲ بازگردید.

حالت ۳) حداقل موارد U_i باشد ← در این صورت تغییر متغیری برای متغیر ستون مربوطه داده و به گام ۲ بازگردید.

حل:

تکرار اول

گام ۱)

	$X_۱$	$X_۲$	$S_۱$	$S_۲$	R.H.S
Z	-۲	-۳	۰	۰	۰
$S_۱$	۳	۱	۱	۰	۹
$S_۲$	۱	۲	۰	۱	۶

محدودیت سوم که مربوط به حد بالایی یک متغیر بود را وارد نکردیم.

گام ۲) متغیر ورودی x_2 است.

گام ۳) چون a_{ij} در هر دو سطر مثبت است، دو θ_i محاسبه می گردد، $x_۲$ متغیر ورودی است، حد بالای آن (محدودیت سوم) همان $U_۲$ است:

$\theta_1 = \frac{9}{1} = 9$ $\quad U_2 = \frac{5}{2} = 2/5$ $\quad \alpha_i =$ نداریم چون a_{ij}ها همگی مثبتند

$\theta_2 = \frac{6}{2} = 3$

بررسی حالت ها:

$$Min\{\theta_1, \theta_2, U_2, \alpha_i\} \rightarrow Min\{9 \text{ و } 3 \text{ و } 2/5, __\} = 2/5$$

پس برای متغیر ستونی x_2 تغییر متغیری به صورت زیر می دهیم:

$$x_2 \leq \frac{5}{2} \rightarrow x_2 = \frac{5}{2} - x'_2$$

تغییر متغیر فوق را در جدول اعمال می کنیم:

	$X_۱$	$X'_۲$	$S_۱$	$S_۲$	R.H.S
Z	-۲	+۳	۰	۰	$\frac{۱۵}{۲}$
$S_۱$	۳	-۱	۱	۰	$\frac{۱۳}{۲}$
$S_۲$	۱	-۲	۰	۱	۱

به گام ۲ باز می گردیم

تکرار دوم :

گام ۲) متغیر ورودی x_1 است.

گام ۳) θ_2 و θ_1 را محاسبه می کنیم، U_1 بینهایت است چون حد بالایی برای x_1 داده نشده، α_i نداریم چون هر دو عنصر لولا مثبت هستند:

$$\theta_1 = \frac{\frac{13}{2}}{3} = \frac{13}{6} \quad , \quad \theta_2 = 1 \quad , \quad U_1 = \infty \quad , \alpha_1 = \text{نداریم}$$

$$Min\{\theta_1 , \theta_2 , U_2 , \alpha_i\} \rightarrow Min\left\{\frac{13}{6} , 1 \ \infty , __\right\} = 1$$

حداقل موارد θ است پس جدول را یک تکرار ادامه می دهیم:

	X_1	X_2'	S_1	S_2	RHS
Z	-۲	۳	۰	۰	$\frac{۱۵}{۲}$
S_1	۳	-۱	۱	۰	$\frac{۱۳}{۲}$
S_2	۱	-۲	۰	۱	۱
Z	۰	-۱	۰	۲	$\frac{۱۹}{۲}$
S_1	۰	۵	۱	-۳	$\frac{۷}{۲}$
X_1	۱	-۲	۰	۱	۱

جدول بهینه نیست به گام ۲ باز می گردیم

تکرار سوم:

گام ۲) متغیر ورودی x_2' است.

گام ۳)

$$\theta_1 = \frac{\frac{7}{2}}{5} = \frac{7}{10} \qquad U_2 = x_2' \text{ حد بالای } = \infty \qquad \alpha_2 = \frac{U_i - b_i}{-a_{ij}} = \frac{\infty - 1}{-(-2)} = \infty$$

چون حد بالای x_1 بی نهایت است (داده نشده)

$$Min\{\theta_1 , U_2 , \alpha_2\} \rightarrow Min\left\{\frac{7}{10} , \infty , \infty\right\} = \frac{7}{10}$$

حداقل موارد θ است، جدول را یک تکرار ادامه می دهیم:

	X_1	X_2'	S_1	S_2	RHS
Z	۰	-۱	۰	۲	$\frac{۱۹}{۲}$
S_1	۰	۵	۱	-۳	$\frac{۷}{۲}$
X_1	۱	-۲	۰	۱	۱
Z	۰	۰	$\frac{۱}{۵}$	$\frac{۷}{۵}$	$\frac{۱۰۲}{۱۰}$
X_2'	۰	۱	$\frac{۱}{۵}$	$-\frac{۳}{۵}$	$\frac{۷}{۱۰}$
X_1	۱	۰	$\frac{۲}{۵}$	$-\frac{۱}{۵}$	$\frac{۲۴}{۱۰}$
	جدول بهینه است				

$$x_1 = \frac{24}{10} \quad , \quad x_2' = \frac{7}{10} \Longrightarrow x_2 = \frac{5}{2} - x_2' \Longrightarrow x_2 = \frac{5}{2} - \frac{7}{10} = \frac{18}{10} \qquad , z^* = \frac{102}{10}$$

کلیه مراحل سیمپلکس این مثال به صورت زیر است:

	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS
Z	-۲	-۳	۰	۰	۰
S_1	۳	۱	۱	۰	۹
S_2	۱	۲ $\boxed{X_2'}$	۰	۱	۶
Z	-۲	۳	۰	۰	$\frac{۱۵}{۲}$
S_1	۳	-۱	۱	۰	$\frac{۱۳}{۲}$
S_2	۱	-۲	۰	۱	۱
Z	۰	-۱	۰	۲	$\frac{۱۹}{۲}$
S_1	۰	۵	۱	-۳	$\frac{۷}{۲}$
X_1	۱	-۲	۰	۱	۱
Z	۰	۰	$\frac{۱}{۵}$	$\frac{۷}{۵}$	$\frac{۱۰۲}{۱۰}$
X_2'	۰	۱	$\frac{۱}{۵}$	$-\frac{۳}{۵}$	$\frac{۷}{۱۰}$
X_1	۱	۰	$\frac{۲}{۵}$	$-\frac{۱}{۵}$	$\frac{۲۴}{۱۰}$
	جدول بهینه است				

تغیر متغیر به ازای X_2

حل عادی

حل عادی

مثال ۲) مسأله زیر را با استفاده از فن حد فوقانی حل کنید:

$$Max\ z = x_1 + 4x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 9 \\ -x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1 \le 8 \\ x_2 \le 3 \end{cases}$$
$$x_1\ ,\ x_2 \ge ۰$$

تکرار اول

گام اول

	$X_۱$	$X_۲$	$S_۱$	$S_۲$	R.H.S
Z	-۱	-۴	۰	۰	۰
$S_۱$	۱	۱	۱	۰	۹
$S_۲$	-۱	۲	۰	۱	۴

گام ۲) متغیر ورودی x_2 است

گام ۳)

$\theta_1 = 9 \quad ,\theta_2 = 2 \quad ,U_2 = 3 \quad ,\alpha_i =$ نداریم

$Min\{9\,,2\,,3\,,—\} = 2$

حداقل موارد مربوط به θ است، یک تکرار عادی حل می کنیم:

	$X_۱$	$X_۲$	$S_۱$	$S_۲$	R.H.S
Z	-۱	-۴	۰	۰	۰
$S_۱$	۱	۱	۱	۰	۹
$S_۲$	-۱	۲	۰	۱	۴
Z	-۳	۰	۰	۲	۸
$S_۱$	$\frac{۳}{۲}$	۰	۱	$-\frac{۱}{۲}$	۷
$X_۲$	$-\frac{۱}{۲}$	۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	۲

جدول بهینه نیست.

تکرار دوم

گام ۲) x_1 متغیر ورودی است

گـام ۳) $\theta_1 = \frac{7}{\frac{3}{2}} = \frac{14}{3} \quad , U_1 = 8 \ , \ \alpha_2 = \frac{U_i - b_i}{-a_{ij}} = \frac{\text{عدد سمت راست} - \text{حد بالای متغیر سطری}}{\text{منفی عدد لولا}} = \frac{3-2}{\frac{1}{2}} = 2$

$Min\,\{\theta_1 , U_1 , \alpha_2\} \ \rightarrow Min\ \left\{\frac{14}{3} , 8 , 2\right\} = 2$

حداقل موارد مربوط به α_2 است، برای متغیر سطر، **تغییر** متغیری به صورت زیر کرده و در جدول اعمال می کنیم:

$x_2 = 3 - x'_2$

	$X_۱$	$X'_۲$	$S_۱$	$S_۲$	R.H.S
Z	-۳	۰	۰	۲	۸
$S_۱$	$\frac{۳}{۲}$	۰	۱	$-\frac{۱}{۲}$	۷
$X'_۲$	$-\frac{۱}{۲}$	-۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	-۱

قبل از این که به گام بعد برویم، مشاهده می کنیم که جدول از حالت یکه بودن خارج شده (چون a_{22} که مربوط به متغیر اساسی است منفی شـده) از ایـن رو این سطر را در یک منفی **ضرب** می نمائیم و سپس حل را ادامه می دهیم:

	$X_۱$	$X'_۲$	$S_۱$	$S_۲$	R.H.S
Z	-۳	۰	۰	۲	۸
$S_۱$	$\frac{۳}{۲}$	۰	۱	$-\frac{۱}{۲}$	۷
$X'_۲$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۰	$-\frac{۱}{۲}$	۱

جدول بهینه نیست، به گام دوم می رویم

تکرار سوم

گام ۲) x_1 متغیر ورودی است

گـــــام ۳) $\theta_1 = \frac{7}{\frac{3}{2}} = \frac{14}{3} \quad , \ \theta_2 = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \ , \ U_1 = 8 \ , \alpha_i =$ نداریم

$Min\,\{\theta_1 , \theta_2 , U_1 , \alpha_i\} \ = \ Min\ \left\{\frac{14}{3} , 2 , 8, -4\right\} = 2$

حداقل مربوط به θ است

	$X_۱$	$X'_۲$	$S_۱$	$S_۲$	R.H.S
Z	-۳	۰	۰	۲	۸
$S_۱$	$\frac{۳}{۲}$	۰	۱	$-\frac{۱}{۲}$	۷
$X'_۲$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۰	$-\frac{۱}{۲}$	۱
Z	۰	۶	۰	-۱	۱۴
$S_۱$	۰	-۳	۱	۱	۴
$X_۱$	۱	۲	۰	-۱	۲

جدول بهینه نیست، به گام ۲ بازمی گردیم

تکرار چهارم

گام ۲) s_2 متغیر ورودی است

گام ۳)

$$\theta_1 = \frac{4}{1} = 4 \quad , \quad U_4 = \infty \quad , \alpha_2 = \frac{8-2}{1} = 6$$

$$Min\{\theta_1 \ , U_4 \ , \alpha_2\} \ \rightarrow Min\{4 \ , \infty \ , 6\} = 4$$

حداقل موارد مربوط به θ است

	$X_۱$	$X'_۲$	$S_۱$	$S_۲$	R.H.S
Z	۰	۶	۰	-۱	۱۴
$S_۱$	۰	-۳	۱	۱	۴
$X_۱$	۱	۲	۰	-۱	۲
Z	۰	۳	۱	۰	۱۸
$S_۲$	۰	-۳	۱	۱	۴
$X_۱$	۱	-۱	۱	۰	۶
	جدول بهینه است				

$X_۱$=۶ ، $X'_۲$=۰ ⇒ $X_۲$=۳

Z^*=۱۸

۱۵- الگوریتم محدودیت مصنوعی

از این الگوریتم برای حل مسائلی که فاقد شرط بهینگی و موجه بودن می باشند استفاده می کنیم. گامهای این الگوریتم را باری دیگر مرور می کنیم:

گام ۱) تابع هدف را Max، و تمامی محدودیت های مسأله را به صورت کوچک تر مساوی درآورید، آن گاه پس از اضافه کردن متغیرهای کمکی به محدودیت ها، مسأله را وارد جدول سیمپلکس کنید.

گام ۲) برای تمامی متغیرهای تصمیمی که دارای ضریب منفی در سطر صفر جدول ابتدایی هستند، محدودیتی به صورت زیر نوشته و بعد از اضافه کردن متغیر کمکی، آن را به عنوان یک محدودیت جدید به جدول بیفزائید:

$$\sum_{j=p} xj \leq M \qquad p = \{j|\ C_j < 0\}$$

گام ۳) متغیر ورودی را انتخاب کنید

گام ۴) در جدول ابتدایی، سطر مربوط به محدودیت مصنوعی را سطر لولا نامیده و متغیر کمکی مربوط به آن را به عنوان متغیر خروجی انتخاب کنید و سیمپلکس را به صورت عادی، یک جدول حل کنید.

گام ۵) حال که یک تکرار به پیش آمدیم، ادامه حل را با روش سیمپلکس ثانویه و به صورت معمولی به انجام می رسانیم تا به جواب نهایی برسیم.

مثال زیر را با استفاده از الگوریتم محدودیت مصنوعی حل کنید؟

$$Max\ z = 4\,x_1 + 3x_2 - 9x_3$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 \le 10 \\ 2\,x_1 + x_2 + 2\,x_3 \ge 2 \\ x_1 + 2x_3 \ge 3 \end{cases}$$
$$x_1\,, x_2\,, x_3 \ge ۰$$

حل:

گام ۱)

$$Max\ z\ -4\,x_1 - 3x_2 - 9x_3$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + s_1 = 10 \\ -2\,x_1 - x_2 - 2\,x_3 + s_2 = -2 \\ -x_1 - 2x_3 + s_3 = -3 \end{cases}$$
$$x_1\,, x_2\,, x_3\,, s_1\,, s_2\,, s_3 \ge ۰$$

	$X_۱$	$X_۲$	$X_۳$	$S_۱$	$S_۲$	$S_۳$	R.H.S
Z	-۴	-۳	۹	۰	۰	۰	۰
$S_۱$	۳	۴	۱	۱	۰	۰	۱۰
$S_۲$	-۲	-۱	-۲	۰	۱	۰	-۲
$S_۳$	-۱	۰	-۲	۰	۰	۱	-۳

همان طور که مشاهده می گردد، جدول فوق نه دارای شرط بهینگی است و نه موجه بودن.

گـــــام ۲)

$$x_1 + x_2 \le M \quad \rightarrow \quad X_1 + X_2 + S_M = M$$

	$X_۱$	$X_۲$	$X_۳$	$S_۱$	$S_۲$	$S_۳$	S_M	R.H.S
Z	-۴	-۳	۹	۰	۰	۰	۰	۰
$S_۱$	۳	۴	۱	۱	۰	۰	۰	۱۰
$S_۲$	-۲	-۱	-۲	۰	۱	۰	۰	-۲
$S_۳$	-۱	۰	-۲	۰	۰	۱	۱	-۳
S_M	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۱	M

گام ۳) متغیر ورودی X_1 است

گام ۴ و ۵)

	$X_۱$	$X_۲$	$X_۳$	$S_۱$	$S_۲$	$S_۳$	S_M	R.H.S
Z	-۴	-۳	۹	۰	۰	۰	۰	۰
$S_۱$	۳	۴	۱	۱	۰	۰	۰	۱۰
$S_۲$	-۲	-۱	-۲	۰	۱	۰	۰	-۲
$S_۳$	-۱	۰	-۲	۰	۰	۱	۰	-۳
S_M	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۱	M
Z	۰	۱	۹	۰	۰	۰	۴	۴M
$S_۱$	۰	۱	۱	۱	۰	۰	-۳	۱۰-۳M
$S_۲$	۰	۱	-۲	۰	۱	۰	۲	-۲+۲M
$S_۳$	۰	۱	-۲	۰	۰	۱	۱	-۳+M
$X_۱$	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۱	M
Z	۰	$\frac{۷}{۳}$	$\frac{۳۱}{۳}$	$\frac{۴}{۳}$	۰	۰	۰	$\frac{۴۰}{۳}$
S_M	۰	$-\frac{۱}{۳}$	$-\frac{۱}{۳}$	$-\frac{۱}{۳}$	۰	۰	۱	$-\frac{۱۰}{۳}+M$
$S_۲$	۰	$\frac{۵}{۳}$	$-\frac{۴}{۳}$	$\frac{۲}{۳}$	۱	۰	۰	$\frac{۱۴}{۳}$
$S_۳$	۰	$\frac{۴}{۳}$	$-\frac{۵}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$	۰	۱	۰	$\frac{۱}{۳}$
$X_۱$	۱	$\frac{۴}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$	۰	۰	۰	$\frac{۱۰}{۳}$
	جدول بهینه است							

گام ۴

گام ۵

$$X_۱=\frac{۱۰}{۳}\ ،\ X_۲^{*}=۰\ ،\ Z^{*}=\frac{۴۰}{۳}$$

جدول بهینه است.

$$X_1^* = \frac{10}{3} \quad ,X_2^* = ۰ \ ,Z^* = \frac{40}{3}$$

توجه: عدد سمت راست سطر S_M در جدول نهایی $(-\frac{10}{3}+M)$ است، چون M مقدار بسیار بزرگی است، در نتیجه این عدد مثبت می باشد.

نکته: این مثال و سایر مسائلی که با این روش حل می گردند را می توان با روش M بزرگ و دو فاز نیز حل نمود (بدیهی است که قبل از اعمال تغییرات گام ۱ این کار صورت می پذیرد)، اما هم این روش ساده تر است و هم این که در برخی مواقع مجبور هستیم از این روش استفاده کنیم.

۱۶- الگوریتم اولیه – ثانویه

از این الگوریتم نیز برای حل مسائل غیربهینه و غیر موجه استفاده می شود.

گامهای این الگوریتم را مرور می کنیم:

گام ۱) تابع هدف را به صورت Max و تمامی محدودیت ها را به صورت Max و تمامی محدودیت ها را به صورت کوچکتر مساوی در آورید.

گام ۲) بعد از اضافه کردن متغیرهای کمکی به محدودیت ها، مسأله را وارد جدول سیمپلکس کنید.

گام ۳) اثر سیمپلکس اولیه و از سیمپلکس ثانویه را حساب کنید:

$$\text{اثر سیمپلکس اولیه} = \text{اثر سیمپلکس ثانویه} = \left|\frac{(b_i).(z_j - C_j)}{a_{ij}}\right|$$

گام ۴) بزرگترین قدر مطلق محاسبه شده مربوط به اثر سیمپلکس اولیه یا ثانویه را انتخاب کرده و طبق الگوریتم اولیه یا ثانویه یک جدول حل کنید. (اگر قدر مطلق اثر سیمپلکس اولیه بزرگتر بود مسأله را یک جدول با سیمپلکس اولیه حل می کنیم و اگر اثر ثانویه بزرگتر بود با ثانویه) اگر امکان بکارگیری سیمپلکس اولیه و ثانویه وجود نداشت به انتهای عملیات رسیده اید، در غیر این صورت به گام ۳ بروید.

مثال) مسأله زیر را با استفاده از الگوریتم اولیه ثانویه حل کنید؟

$$Max\ z = 4\,x_1 + 3x_2 - 9x_3$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 \le 10 \\ 2\,x_1 + x_2 + 2\,x_3 \ge 2 \\ x_1 + 2x_3 \ge 3 \end{cases}$$
$$x_1\,, x_2\,, x_3 \ge ۰$$

تکرار اول

گام ۱)

$$Max\ z -4\,x_1 - 3x_2 + 9x_3$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 \le 10 \\ -2\,x_1 - x_2 - 2\,x_3 \le -2 \\ -x_1 \qquad - 2x_3 \le -3 \end{cases}$$
$$x_1\,, x_2\,, x_3 \ge ۰$$

گام ۲)

	$X_۱$	$X_۲$	$X_۳$	$S_۱$	$S_۲$	$S_۳$	R.H.S
Z	-۴	-۳	۹	۰	۰	۰	۰
$S_۱$	۳	۴	۱	۱	۰	۰	۱۰
$S_۲$	-۲	-۱	-۲	۰	۱	۰	-۲
$S_۳$	-۱	۰	-۲	۰	۰	۱	-۳

گام ۳)

اثر سیمپلکس اولیه $= \left|\frac{(-4)\times 10}{3}\right| = \frac{40}{3}$

اثر سیمپلکس ثانویه $= \left|\frac{(-3)\times 9}{-2}\right| = \frac{27}{2}$

گام ۴)

اثر سیمپلکس ثانویه بزرگتر است، پس با الگوریتم سیمپلکس ثانویه جدول را یک تکرار حل می کنیم:

	$X_۱$	$X_۲$	$X_۳$	$S_۱$	$S_۲$	$S_۳$	R.H.S
Z	-۴	-۳	۹	۰	۰	۰	۰
$S_۱$	۳	۴	۱	۱	۰	۰	۱۰
$S_۲$	-۲	-۱	-۲	۰	۱	۰	-۲
$S_۳$	-۱	۰	-۲	۰	۰	۱	-۳
Z	$-\frac{۱۷}{۲}$	-۳	۰	۰	۰	$+\frac{۹}{۲}$	$-\frac{۲۷}{۲}$
$S_۱$	$\frac{۵}{۲}$	۴	۰	۱	۰	$+\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱۷}{۲}$
$S_۲$	-۱	-۱	۰	۰	۱	-۱	۱
$X_۳$	$\frac{۱}{۲}$	۰	۱	۰	۰	$-\frac{۱}{۲}$	$\frac{۳}{۲}$

هنوز هر دو شرط بهینگی و موجه بودن برقرار نشده اند، پس حل را ادامه می دهیم و به گام ۳ باز می گردیم.

تکرار دوم

گام ۳)

$$\text{اثر سیمپلکس اولیه} = \left|\frac{\left(-\frac{17}{2}\right)\times\left(\frac{17}{2}\right)}{\frac{5}{2}}\right| = 28/9$$

$$\text{اثر سیمپلکس اولیه} = \left|\frac{\left(-\frac{17}{2}\right)\times\left(\frac{3}{2}\right)}{\frac{1}{2}}\right| = 25/5$$

امکان محاسبه اثر سیمپلکس ثانویه وجود ندارد.

گام ۴) جدول قبل را یک تکرار ادامه می دهیم:

	$X_۱$	$X_۲$	$X_۳$	$S_۱$	$S_۲$	$S_۳$	R.H.S
Z	$-\frac{۱۷}{۲}$	-۳	۰	۰	۰	$+\frac{۹}{۲}$	$-\frac{۲۷}{۲}$
$S_۱$	$\frac{۵}{۲}$	۴	۰	۱	۰	$+\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱۷}{۲}$
$S_۲$	-۱	-۱	۰	۰	۱	-۱	۱
$X_۳$	$\frac{۱}{۲}$	۰	۱	۰	۰	$-\frac{۱}{۲}$	$\frac{۳}{۲}$
Z	۰	$\frac{۱۰۶}{۱۰}$	۰	$\frac{۱۷}{۵}$	۰	$\frac{۶۲}{۱۰}$	$\frac{۹۷}{۵}$
$X_۱$	۱	$\frac{۸}{۵}$	۰	$\frac{۲}{۵}$	۰	$\frac{۱}{۵}$	$\frac{۱۷}{۵}$
$S_۲$	۰	$\frac{۳}{۵}$	۰	$\frac{۲}{۵}$	۱	$-\frac{۴}{۵}$	$\frac{۲۲}{۵}$
$X_۳$	۰	$-\frac{۴}{۵}$	۱	$-\frac{۱}{۵}$	۰	$-\frac{۶}{۱۰}$	$-\frac{۲}{۱۰}$

هنوز هر دو شرط بهینگی و موجه بودن برقرار نشده اند، پس حل را ادامه می دهیم و به گام ۳ باز می گردیم.

تکرار سوم

گام ۳) اثر سیملکس اولیه قابل محاسبه نیست.

$$\text{اثر سیمپلکس ثانویه} = \left|\frac{\left(-\frac{2}{10}\right)\times\left(\frac{62}{10}\right)}{\left(-\frac{6}{10}\right)}\right| = 2/066$$

$$\text{اثر سیمپلکس ثانویه} = \left|\frac{\left(-\frac{2}{10}\right)\times\left(\frac{17}{5}\right)}{\left(-\frac{1}{5}\right)}\right| = \frac{17}{5} = 3/4$$

$$\text{اثر سیمپلکس ثانویه} = \left|\frac{\left(-\frac{2}{10}\right)\times\left(\frac{106}{10}\right)}{\left(-\frac{4}{5}\right)}\right| = \frac{53}{20} = 2/65$$

* توجه داشته باشید که چون امکان محاسبه اثر سیمپلکس اولیه وجود ندارد، می توان آثار ثانویه را محاسبه نکرد و حل را از طریق ثانویه ادامه داد. محاسبات فوق فقط جهت یادگیری است.

گام ۴) حل این جدول به همراه سایر جداول پیش در زیر داده شده است:

	$X_۱$	$X_۲$	$X_۳$	$S_۱$	$S_۲$	$S_۳$	R.H.S
Z	-۴	-۳	۹	۰	۰	۰	۰
$S_۱$	۳	۴	۱	۱	۰	۰	۱۰
$S_۲$	-۲	-۱	-۲	۰	۱	۰	-۲
$S_۳$	-۱	۰	-۲	۰	۰	۱	-۳
Z	$-\frac{۱۷}{۲}$	-۳	۰	۰	۰	$+\frac{۹}{۲}$	$-\frac{۲۷}{۲}$
$S_۱$	$\frac{۵}{۲}$	۴	۰	۱	۰	$+\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱۷}{۲}$
$S_۲$	-۱	-۱	۰	۰	۱	-۱	۱
$X_۳$	$\frac{۱}{۲}$	۰	۱	۰	۰	$-\frac{۱}{۲}$	$\frac{۳}{۲}$
Z	۰	$\frac{۱۰۶}{۱۰}$	۰	$\frac{۱۷}{۵}$	۰	$\frac{۶۲}{۱۰}$	$\frac{۷۷}{۵}$
$X_۱$	۱	$\frac{۸}{۵}$	۰	$\frac{۲}{۵}$	۰	$\frac{۱}{۵}$	$\frac{۱۷}{۵}$
$S_۲$	۰	$\frac{۳}{۵}$	۰	$\frac{۲}{۵}$	۱	$-\frac{۴}{۵}$	$\frac{۲۲}{۵}$
$X_۳$	۰	$-\frac{۴}{۵}$	۱	$-\frac{۱}{۵}$	۰	$-\frac{۶}{۱۰}$	$-\frac{۲}{۱۰}$
Z	۰	$\frac{۷}{۳}$	$\frac{۳۱}{۳}$	۰	۰	۰	$\frac{۴۰}{۳}$
$X_۱$	۱	$\frac{۴}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$	۰	۰	$\frac{۱۰}{۳}$
$S_۲$	۰	$\frac{۵}{۳}$	$-\frac{۴}{۳}$	$\frac{۲}{۳}$	۱	۰	$\frac{۱۴}{۳}$
$X_۳$	۰	$\frac{۴}{۳}$	$-\frac{۱۰}{۶}$	$\frac{۱}{۳}$	۰	۱	$\frac{۱}{۳}$

الگوریتم سیمپلکس ثانویه

الگوریتم سیمپلکس اولیه

الگوریتم سیمپلکس ثانویه

جدول بهینه است.

$$x_1^* = \frac{10}{3} \quad , z^* = \frac{52}{3}$$

جدول بهینه این روش را با جدول بهینه روش محدودیت مصنوعی مقایسه کنید.

چند نکته:

اگر درگام ۳ برای **یک عدد منفی** سطر صفر امکان محاسبه اثر سیمپلکس اولیه نباشد. این عدد را در نظر نگرفته و سراغ منفی ترین عدد در بین سایر اعداد منفی این سطر بروید و اثر را بر اساس آن محاسبه کنید. این روش را در محاسبه اثر سیمپلکس ثانویه در صورت عدم امکان محاسبه اثر ثانویه برای منفی ترین عدد در سمت راست نیز به کار گیرید.

* هنگامی که با استفاده از قویترین اثر، سیمپلکس اولیه و یا ثانویه برای ادامه حل انتخاب شد، اثرهای محاسبه شده را کنار می گذاریم و برای محاسبه ورودی و خروجی مطابق با گذشته عمل می نمائیم.

۱۷- مثال پایان فصل هفتم

مسأله زیر را با روشهای الگوریتم اولیه ثانویه و الگوریتم محدودیت مصنوعی حل کنید. (اگر دوست داشتید با دوفاز و Big M نیز حل کنید)

$$Max\ Z = ۴x_۱ + ۲x_۲ + ۳x_۳$$
$$\begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ + x_۳ \leq ۴۸ \\ ۲x_۱ \qquad + x_۳ \geq ۴ \\ \qquad x_۲ + ۳x_۳ \geq ۱۰ \end{cases}$$
$$x_۱ , x_۲ , x_۳ \geq ۰$$

حل:

ابتدا روش اولیه ثانویه:

$$Max\ Z - ۴x_۱ - ۲x_۲ - ۳x_۳$$
$$\begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ + x_۳ + S_۱ = ۴۸ \\ -۲x_۱ \qquad - x_۳ + S_۲ = -۴ \\ \qquad -x_۲ - ۳x_۳ + S_۳ = -۱۰ \end{cases}$$
$$x_۱ , x_۲ , x_۳, S_۱, S_۲, S_۳ \geq ۰$$

	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$S_۱$	$S_۲$	$S_۳$	
Z	-۴	-۲	-۳	۰	۰	۰	۰
$S_۱$	۱	۲	۱	۱	۰	۰	۴۸
$S_۲$	-۲	۰	-۱	۰	۱	۰	-۴
$S_۳$	۰	-۱	-۳	۰	۰	۱	-۱۰
Z	۰	۶	۱	۴	۰	۰	۱۹۲
$x_۱$	۱	۲	۱	۱	۰	۰	۴۸
$S_۲$	۰	۴	۱	۲	۱	۰	۹۲
$S_۳$	۰	-۱	-۳	۰	۰	۱	-۱۰
Z	۰	$\frac{۱۷}{۳}$	۰	۴	۰	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۴۷۶}{۳}$
$x_۱$	۱	$\frac{۵}{۳}$	۰	۱	۰	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱۳۴}{۳}$
$S_۲$	۰	$\frac{۱۱}{۳}$	۰	۲	۱	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۲۶۶}{۳}$
$x_۳$	۰	$\frac{۱}{۳}$	۱	۰	۰	$-\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱۰}{۳}$
	جدول بهینه است						

اثر اولیه $= \left|\frac{(-۴).(۴۸)}{۱}\right| = ۱۹۲$

اثر ثانویه ندارد

حل را با سیمپلکس اولیه ادامه میدهیم

اثر اولیه ندارد

اثر ثانویه $= \left|\frac{(-۱۰).(۶)}{(-۱)}\right| = ۶۰$

$= \left|\frac{(-۱۰).(۱)}{(-۳)}\right| = \frac{۱۰}{۳}$

حل را با ثانویه ادامه می دهیم.

روش محدودیت مصنوعی:

$$Max\ Z - ۴x_۱ - ۲x_۲ - ۳x_۳$$

$$\begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ + x_۳ + S_۱ = ۴۸ \\ -۲x_۱ \qquad - x_۳ + S_۲ = -۴ \\ \qquad -x_۲ - ۳x_۳ + S_۳ = -۱۰ \\ x_۱ + \ x_۲ + x_۳ + S_M = M \end{cases}$$

$$x_۱ , x_۲ , x_۳, S_۱, S_۲, S_۳, S_M \geq ۰$$

	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$S_۱$	$S_۲$	$S_۳$	S_M	RHS
Z	-۴	-۲	-۳	۰	۰	۰		۰
$S_۱$	۱	۲	۱	۱	۰	۰	۰	۴۸
$S_۲$	-۲	۰	-۱	۰	۱	۰	۰	-۴
$S_۳$	۰	-۱	-۳	۰	۰	۱	۰	-۱۰
S_M	۱	۱	۱	۰	۰	۰	۱	M
Z	۰	۲	۱	۰	۰	۰	۴	۴M
$S_۱$	۰	۱	۰	۱	۰	۰	-۱	۴۸-M
$S_۲$	۰	۲	۱	۰	۱	۰	۲	-۴+۲M
$S_۳$	۰	-۱	-۳	۰	۰	۱	۰	-۱۰
$x_۱$	۱	۱	۱	۰	۰	۰	۱	M
Z	۰	۶	۱	۴	۰	۰	۰	۱۹۲
S_M	۰	-۱	۰	-۱	۰	۰	۱	-۴۸+M
$S_۲$	۰	۴	۱	۲	۱	۰	۰	۹۲
$S_۳$	۰	-۱	-۳	۰	۰	۱	۰	-۱۰
$x_۱$	۱	۲	۱	۱	۰	۰	۰	۴۸
Z	۰	$\frac{۱۷}{۳}$	۰	۴	۰	$\frac{۱}{۳}$	۰	$\frac{۴۷۶}{۳}$
S_M	۰	-۱	۰	-۱	۰	۰	۱	-۴۸+M
$S_۲$	۰	$\frac{۱۱}{۳}$	۰	۲	۱	$\frac{۱}{۳}$	۰	$\frac{۲۶۶}{۳}$
$x_۳$	۰	$\frac{۱}{۳}$	۱	۰	۰	$-\frac{۱}{۳}$	۰	$\frac{۱۰}{۳}$
$x_۱$	۱	$\frac{۵}{۳}$	۰	۱	۰	$\frac{۱}{۳}$	۰	$\frac{۱۳۴}{۳}$
	جدول بهینه است							

۱۸- روش گوشه‌ی شمال غربی

کار را از خانه‌ی (۱-۱) شروع کرده و بیشترین مقدار ممکن (حداقل عرضه سطر و تقاضای ستون مربوطه) را به آن خانه تخصیص می دهیم. سپس مقدار تخصیص داده شده را از مقدار عرضه‌ی سطر و مقدار تقاضای ستون مربوطه (سطر ۱ و ستون ۱) کم می‌کنیم.

در این حال یا مقدار عرضه‌ی سطر و یا تقاضای ستون به صفر می‌رسد. در صورتی که مقدار عرضه به صفر رسید، در ستون حرکت می‌کنیم و یک خانه به پائین می‌آییم و در صورتی که مقدار تقاضای ستون به صفر رسید، در سطر حرکت می‌کنیم و یک خانه به راست می‌آییم.

در خانه‌ی جدید نیز بیشترین مقدار ممکن را تخصیص داده و مجدداً به خانه‌ای دیگر حرکت می‌کنیم. این کار تا جایی ادامه می‌یابد که تمام عرضه به تمام تقاضا تخصیص یابد.

مثال) جدول حمل و نقل زیر با روش گوشه‌ی شمال غربی حل شده و به جواب موجه اولیه رسیده است.

مقصد / مبدا	A	B	C	عرضه
۱	۴	۱	۳	۱۰
۲	۳	۲	۴	۲۵
۳	۳	۴	۲	۲۵
تقاضا	۳۰	۲۰	۱۰	۶۰

مقصد / مبدا	A	B	C	عرضه
۱	۴ ۱۰	۱	۳	~~۱۰~~ ۰
۲	۳ ۲۰	۲ ۵	۴	~~۲۵~~ ~~۵~~ ۰
۳	۳	۴ ۱۵	۲ ۱۰	~~۲۵~~ ~~۱۰~~ ۰
تقاضا	~~۳۰~~ ~~۲۰~~ ۰	~~۲۰~~ ~~۱۵~~ ۰	~~۱۰~~ ۰	۶۰

جدول بالا به این معناست که متغیرهای زیر اساسی هستند، مقدار آنها هم ارائه شده:

$X_{۱A} = ۱۰$ $X_{۲A} = ۲۰$ $X_{۲B} = ۵$ $X_{۳B} = ۱۵$ $X_{۲C} = ۱۰$

مقدار هزینه ی کل این جدول نیز از ضرب مقدار متغیرهای اساسی در هزینه‌ی آن خانه‌ها محاسبه می‌گردد:

10(4)+20(3)+5(2)+15(4)+10(2)=190

بدست آوردن جواب موجه ابتدایی مثال ۱ از روش گوشه‌ی شمال غربی، بصورت مرحله‌ای به شرح زیر است:

{توجه کنید که هزینه‌ی خانه‌ها تأثیری بر انجام این روش ندارند، از اینرو به منظور سادگی در جداول زیر ارائه نشدند}

در این جدول به خانه‌ی (A-۱) مقدار ۱۰ تخصیص یافته چون مقدار عرضه‌ی (۱)برابر ۱۰ و مقدار تقاضای ستون (۱) برابر ۳۰ است و مقدار ۱۰ حداقل آنها می‌باشد. پس مقدار ۱۰ را از عرضه سطر (۱) و تقاضای ستون (۱) کسر می‌کنیم.

مقصد / مبدأ	A	B	C	
۱	۱۰			~~۱۰~~ ۰
۲				۲۵
۳				۲۵
	~~۳۰~~ ۲۰	۲۰	۱۰	

چون مقدار سطر اول به صفر رسید، در ستون، یک خانه به پائین می‌آییم و در خانه‌ی (A-۲) قرار می‌گیریم. مقدار عرضه‌ی این سطر ۲۵ بوده و از تقاضای این ستون ۲۰ واحد باقی مانده است.

از اینرو مقدار ۲۰ واحد به خانه‌ی (A-۲) تخصیص میدهیم و این مقدار را از عرضه‌ی سطر (۲) و تقاضای ستون (۱) کسر می‌کنیم.

مقصد / مبدأ	A	B	C	
۱	۱۰			~~۱۰~~ ۰
۲	۲۰			۵ ~~۲۵~~
۳				۲۵
	~~۳۰~~ ~~۲۰~~ ۰	۲۰	۱۰	

چون ستون به صفر رسید یک خانه به سمت راست می‌آییم.

حداقل سطر ۲ و ستون ۲ که ۵ است را تخصیص داده و از هر دو کسر می‌کنیم.

مقصد / مبدأ	A	B	C	
۱	۱۰			~~۱۰~~ ۰
۲	۲۰	۵		~~۵~~ ۰ ~~۲۵~~
۳				۲۵
	~~۳۰~~ ~~۲۰~~	~~۲۰~~ ۱۵	۱۰	۶۰

دو جدول بعدی تا رسیدن به جواب هم به شکل زیر هستند:

مقصد / مبدأ	A	B	C	
۱	۱۰			~~۱۰~~ ۰
۲	۲۰	۵		~~۵~~ ۰ ~~۲۵~~
۳		۱۵		~~۲۵~~ ۱۰
	~~۳۰~~ ~~۲۰~~ ۰	~~۲۰~~ ~~۱۵~~ ۰	۱۰	۶۰

مقصد / مبدأ	A	B	C	
۱	۱۰			~~۱۰~~ ۰
۲	۲۰	۵		~~۵~~ ۰ ~~۲۵~~
۳		۱۵	۱۰	~~۲۵~~ ~~۱۰~~ ۰
	~~۳۰~~ ~~۲۰~~ ۰	~~۲۰~~ ~~۱۵~~ ۰	~~۱۰~~ ۰	۶۰

اگر m تعداد سطرها و n تعداد ستون ها باشد، تعداد خانه های جدول m×n و تعداد خانه‌های اساسی جدول m+n -۱ می‌باشد:
۳+۳-۱=۵

ممکن است زمانی که به یک خانه جدید می‌رویم، مقدار سطر و ستون مربوط به آن خانه برابر باشد و با قرار دادن مقدار برای آن خانه، سطر و ستون همزمان به صفر برسند (این وضعیت بیانگر حالت تبهگن است).

اگر مقدار سطر و ستون هر دو با هم به مقدار صفر کاهش یابند، به خانه‌ی سمت راستی رفته، یک صفر در آن قرار میدهیم و به پائین حرکت می‌کنیم. (و یا به خانه‌ی پائینی رفته، یک صفر در آن قرار میدهیم و به راست حرکت می‌کنیم)

*توجه کنید که خانه‌هایی که دارای مقدار می‌شوند خانه‌های اساسی هستند و مقداری که به آنها تعلق می‌گیرد همان مقادیر متغیرهای اساسی است. در حالتی که سطر و ستون همزمان صفر می‌شوند حالت تبهگن پیش آمده است و طبیعی است که مقدار یکی از متغیرهای اساسی (یکی از خانه‌های جدول) صفر باشد. (این صفر یک مقدار است و متغیر مربوط به آن خانه اساسی است و با خانه های خالی که غیراساسی هستند تفاوت دارد)

مثال۲) جواب موجه اولیه جدول زیر را با روش گوشه شمال غربی بدست آورید:

	A	B	C	عرضه
۱	۴	۱	۳	۱۰
۲	۳	۲	۴	۲۰
۳	۳	۴	۲	۳۰
تقاضا	۲۰	۲۰	۱۰	۶۰

{جداول زیر، حل را بصورت مرحله‌ای نشان می‌دهند، به منظور سادگی، هزینه‌ها آورده نشده است و تأثیری نیز بر حل ندارد}

مبدأ \ مقصد	A	B	C	عرضه
۱	۱۰			~~۱~~ ۰
۲	۲۰			۲۰
۳				۳۰
تقاضا	~~۳~~ ~~۲~~ ۰	۲۰	۱۰	۶۰

⇒

مبدأ \ مقصد	A	B	C	عرضه
۱	۱۰			~~۱~~ ۰
۲	۲۰	۰		~~۲~~ ۰
۳				۳۰
تقاضا	~~۳~~ ~~۲~~ ۰	۲۰	۱۰	۶۰

به یکی از این دو شکل حل ادامه می‌یابد

مبدأ \ مقصد	A	B	C	عرضه
۱	۱۰			~~۱~~ ۰
۲	۲۰			~~۲~~ ۰
۳				۳۰
تقاضا	~~۳~~ ~~۲~~ ۰	۲۰	۱۰	۶۰

مبدأ \ مقصد	A	B	C	عرضه
۱	۱۰			~~۱~~ ۰
۲	۲۰	۰		~~۲~~ ۰
۳				۳۰
تقاضا	~~۳~~ ~~۲~~ ۰	۲۰	۱۰	۶۰

مبدأ \ مقصد	A	B	C	عرضه
۱	۱۰			~~۱~~ ۰
۲	۲۰	۰		~~۲~~ ۰
۳		۲۰		~~۳~~ ۱۰
تقاضا	~~۳~~ ~~۲~~ ۰	~~۲~~ ۰	۱۰	۶۰

مبدأ \ مقصد	A	B	C	عرضه
۱	۱۰			~~۱~~ ۰
۲	۲۰	۰		~~۲~~ ۰
۳		۲۰	۱۰	~~۳~~ ~~۱~~ ۰
تقاضا	~~۳~~ ~~۲~~ ۰	~~۲~~ ۰	~~۱~~ ۰	۶۰

مبدأ \ مقصد	A	B	C	عرضه
۱	۱۰			~~۱~~ ۰
۲	۲۰			~~۲~~ ۰
۳	۰	۲۰	۱۰	~~۳~~ ~~۱~~ ۰
تقاضا	~~۳~~ ~~۲~~ ۰	~~۲~~ ۰	~~۱~~ ۰	۶۰

۱۹- روش حداقل سطر

در سطر اول خانه‌ای را پیدا می‌کنیم که کمترین هزینه را داشته باشد، به این خانه بیشترین مقدار ممکن (مقدار کوچکتر سطر یا ستون مربوطه) را تخصیص میدهیم، اگر مقدار سطر ، صفر شد، این سطر از محاسبات خارج می‌شود و به سطر بعدی می رویم و همین کار را تکرار می کنیم ، اگر مقدار ستون صفر شد ، این ستون از محاسبات خارج می شود و در همین سطر خانه‌ای را پیدا می‌کنیم که بعد از خانه‌ی اساسی شده، کمترین هزینه را داشته باشد.

در این خانه نیز بیشترین مقدار را قرار می‌دهیم و اگر سطر صفر شد به سطر بعدی می‌رویم و اگر نشد عملیات در همین سطر ادامه می‌یابد. این کار را آنقدر ادامه می‌دهیم تا به جواب برسیم.

مثال

مبدأ / مقصد	A	B	C	عرضه
۱	۴	۱ ۱۰	۳	~~۱۰~~ ۰
۲	۳ ۱۵	۲ ۱۰	۴	~~۲۵~~ ~~۱۵~~ ۰
۳	۳ ۱۵	۴	۲ ۱۰	~~۲۵~~ ~~۱۵~~ ۰
تقاضا	~~۳۰~~ ~~۱۵~~ ۰	~~۲۰~~ ~~۱۰~~ ۰	~~۱۰~~ ۰	۶۰

$\Rightarrow$

مبدأ / مقصد	A	B	C	عرضه
۱	۴	۱	۳	۱۰
۲	۳	۲	۴	۲۵
۳	۳	۴	۲	۲۵
تقاضا	۳۰	۲۰	۱۰	

مراحل بصورت جداگانه و تفصیلی در زیر ارائه شده است:

کمترین هزینه سطر اول مربوط به خانه X_{1B} است. مقدار ۱۰ را قرار داده و از سطر و ستون مربوطه کم می‌کنیم. چون مقدار سطر به صفر رسید، به سطر بعدی می‌رویم.

مبدأ / مقصد	A	B	C	
۱	۴	۱ ۱۰	۳	~~۱۰~~ ۰
۲	۳	۲	۴	۲۵
۳	۳	۴	۲	۲۵
	۳۰	~~۲۰~~ ~~۱۰~~ ۰	۱۰	

در سطر دوم کمترین هزینه مربوط به خانه X_{2B} است و بیشترین مقداری که می‌توان در آن قرار داد ۱۰ است. مقدار ستون صفر می‌شود این ستون از محاسبات بعدی کنار می‌رود و در سطر به دنبال خانه‌ای می‌گردیم که کمترین هزینه را داشته باشد (بغیر از خانه X_{2B})

مبدأ / مقصد	A	B	C	
۱	۴	۱ ۱۰	۳	~~۱۰~~ ۰
۲	۳	۲ ۱۰	۴	~~۲۵~~ ۱۵
۳	۳	۴	۲	۲۵
	۳۰	~~۲۰~~ ~~۱۰~~ ۰	۱۰	

در سطر دوم، خانه‌ی $X_{۲A}$ کمترین هزینه را دارد (بعد از $X_{۲B}$) مقدار لازم را قرار میدهیم. سطر به صفر می‌رسد، پس به سطر بعدی می‌رویم.

مقصد / مبدأ	A	B	C	
۱	۴	۱ ۱۰	۳	~~۱~~ ۰
۲	۳	۲ ۱۰	۴	~~۲۵~~ ~~۱۵~~ ۰
۳	۳	۴	۲	۲۵
	~~۳~~ ۱۵	~~۲~~ ~~۱~~ ۰	۱۰	

محاسبات مربوط به سطر آخر هم به شکل زیر است:

	A	B	C	عرضه
۱	۴	۱ ۱۰	۳	~~۱~~ ۰
۲	۳ ۱۵	۲ ۱۰	۴	~~۲۵~~ ~~۱۵~~ ۰
۳	۳ ۱۵	۴	۲ ۱۰	~~۲۵~~ ~~۱۵~~ ۰
	~~۳~~ ~~۱۵~~ ۰	~~۲~~ ~~۱~~ ۰	~~۱~~ ۰	

	A	B	C	
۱	۴	۱ ۱۰	۳	~~۱~~ ۰
۲	۳ ۱۵	۲ ۱۰	۴	~~۲۵~~ ~~۱۵~~ ۰
۳	۳	۴	۲ ۱۰	~~۲۵~~ ۱۵
	~~۳~~ ۱۵	~~۲~~ ~~۱~~ ۰	~~۱~~ ۰	

* مشاهده می‌کنید که تعداد متغیرهای اساسی ($m+n-۱$) است: ۵= ۱- ۳+۳

* برای راحتی کار در مراحل حل، هر سطر یا ستونی که مقدارش به صفر رسید و خواستید از محاسبات کنار بگذارید را هاشور بزنید.

* اگر عرضه‌ی سطر و تقاضای ستون همزمان به صفر رسیدند، یا سطر یا ستون را کنار می‌گذاریم و حل را ادامه میدهیم. در اینصورت به یک خانه مقدار صفر اختصاص خواهد یافت (این وضعیت بیانگر حالت خاص تبهگن در حمل و نقل است). دقت کنید که در این حالت اگر چه عرضه و تقاضای یک سطر و ستون همزمان به صفر رسیده‌اند اما نمی‌توان همزمان هر دو را از ادامه‌ی محاسبات کنار گذاشت، یکی از آنها کنار گذاشته می‌شود و دیگری (سطر یا ستون) که به صفر رسیده است، در مرحله بعد باید توسط یکی از خانه‌های جدول که مقدار صفر می‌گیرد کنار گذاشته شود.

مبدأ / مقصد	A	B	C	عرضه
۱	۴	۱ ۱۰	۳	~~۱~~ ۰
۲	۳ ۰	۲ ۱۰	۴	~~۱~~ ۰
۳	۳ ۳۰	۴	۲ ۱۰	~~۴~~ ~~۳~~ ۰
تقاضا	~~۳~~ ۰	~~۲~~ ~~۱~~ ۰	~~۱~~ ۰	۶۰

$\Rightarrow$

مقصد / مبدأ	A	B	C	
۱	۴	۱	۳	۱۰
۲	۳	۲	۴	۱۰
۳	۳	۴	۲	۴۰
	۳۰	۲۰	۱۰	

توضیح سطر دوم:

پس از قرار دادن مقدار ۱۰ در خانه‌ی $X_{۲B}$، مقدار سطر و ستون همزمان به صفر رسیدند، ستون را از محاسبات حذف کردیم و در سطر به خانه‌ای که کمترین هزینه بعدی را داشت مقدار ۰ را تخصیص دادیم. پس سطر نیز از محاسبات خارج شد و به سطر سوم رفتیم.

۲۰- روش حداقل هزینه

در این روش کمترین هزینه را در تمام جدول در نظر می‌گیریم و حداکثر مقدار ممکن را به آن خانه اختصاص میدهیم (اگر چند هزینه برابر بودند یکی را به دلخواه بعنوان کمترین در نظر می‌گیریم). سطر یا ستونی که مقدار آن به صفر رسید را از محاسبات حذف کرده و سراغ خانه‌ی دیگری با کمترین هزینه می‌رویم. اگر سطر و ستون هر دو همزمان به صفر رسیدند (تبهگن) تنها یکی از آنها را در نظر نمی‌گیریم (همانند روشهای قبلی).

مثال

	A	B	C	
۱	۴	۱ (۱۰)	۳	~~۱~~ ۰
۲	۳ (۱۵)	۲ (۱۰)	۴	~~۲۵~~ ~~۱۵~~ ۰
۳	۳ (۱۵)	۴	۲ (۱۰)	~~۲۵~~ ~~۱۵~~ ۰
	~~۳~~ ~~۱۵~~ ۰	~~۲~~ ~~۱~~ ۰	~~۱~~ ۰	

$\Rightarrow$

	A	B	C	
۱	۴	۱	۳	۱۰
۲	۳	۲	۴	۲۵
۳	۳	۴	۲	۲۵
	۳۰	۲۰	۱۰	

کمترین هزینه موجود در جدول مربوط به خانه‌ی X_{1B} است از اینرو مقدار ۱۰ را به این خانه اختصاص میدهیم. سطر اول از محاسبات حذف می‌شود.

مقصد / مبدأ	A	B	C	
۱	۴	۱ (۱۰)	۳	~~۱۰~~ ۰
۲	۳	۲	۴	۲۵
۳	۳	۴	۲	۲۵
	۳۰	~~۲۰~~ ۱۰	۱۰	

کمترین هزینه موجود مربوط به خانه‌ی X_{2B} یا X_{3C} است، حداکثر مقدار ممکن را به یکی از آنها اختصاص می‌دهیم (به X_{2B} اختصاص دادیم)، ستون B هم از محاسبات حذف شد.

مقصد / مبدأ	A	B	C	
۱	۴	۱	۳	
۲	۳	۲ (۱۰)	۴	~~۲۵~~ ۱۵
۳	۳	۴	۲	۲۵
	۳۰	~~۲۰~~ ~~۱۰~~ ۰	۱۰	

کمترین هزینه مربوط به X_{3C} است، حداکثر ممکن را اختصاص می‌دهیم . ستون C هم حذف می‌شود.

در ادامه حل طی دو مرحله به دو خانه‌ی X_{2A} و X_{3A}، هر کدام ۱۵ واحد اختصاص می‌یابد و حل پایان می‌یابد. این مراحل را خودتان انجام دهید.

مقصد / مبدأ	A	B	C	
۱	۴	۱ (۱۰)	۳	~~۱۰~~ ۰
۲	۳	۲ (۱۰)	۴	~~۲۵~~ ۱۵
۳	۳	۴	۲ (۱۰)	~~۲۵~~ ۱۵
	۳۰	~~۲۰~~ ~~۱۰~~ ۰	~~۱۰~~ ۰	

۲۱- روش تخمین وگل

گام ۱) برای هر سطر جریمه‌ای را که تفاوت بین دو مورد از کم هزینه‌ترین خانه‌ها در آن سطر است را محاسبه کنید و بنویسید. همین کار را برای ستونها هم انجام دهید.

گام ۲) آن سطر یا ستونی که دارای بیشترین مقدار جریمه است را در نظر بگیرید و در آن سطر یا ستون به خانه‌ای که کمترین هزینه را دارد، بیشترین مقدار ممکن را اختصاص دهید و این مقدار را از سطر و ستون مربوطه کسر کنید.

گام ۳) سطر یا ستونی که مقدارش به صفر رسید را از محاسبات حذف کنید و مجدداً جریمه‌ها را محاسبه کرده و به گام ۲ بروید. (اگر سطر و ستون بصورت همزمان به صفر رسیدند بیانگر حالت تبهگن است، در این حال تنها سطر و یا ستون را حذف می‌کنیم و سطر یا ستون باقی مانده مقدارش صفر خواهد بود، حل را بصورت عادی ادامه خواهیم داد و زمانی که به این سطر یا ستـون رسیدیم، خانه اسـاسی مربوط به آن دارای مقدار صفر شده و در آن زمان این سطر یا ستون را هم حذف می کنیم)

گام ۴) گام ۲ و ۳ را آنقدر تکرار می‌کنیم تا به جواب موجه ابتدایی بر سیم.

مثال

جواب موجه اولیه مثال ۱ را با روش وگل بدست آورید:

جریمه‌ها را طبق روال گفته شده محاسبه می‌کنیم ، بعنوان مثال جریمه‌ی صفر ستون اول حاصل (۳-۳) میباشد.

از میان جریمه‌ها، بیشترین آنها ۲ است، از اینرو در سطر مربوطه (سطر اول) به خانه‌ای که کمترین هزینه را دارد بیشترین مقدار ممکن را اختصاص داده و آن مقدار را از سطر و ستون کسر می‌نمائیم.

	A	B	C	عرضه	جریمه۱
۱	۴	۱ ۱۰	۳	~~۱۰~~ ۰	۲
۲	۳	۲	۴	۲۵	۱
۳	۳	۴	۲	۲۵	۱
تقاضا	۳۰	~~۲۰~~ ۱۰	۱۰	۶۰	
جریمه۱	۰	۱	۱		

سطر اول از محاسبات حذف می‌شود، مجدداً جریمه‌ها را حساب می‌کنیم (جریمه ۲) و یک خانه را اساسی می‌کنیم.

این روند تا بدست آمدن جواب موجه ابتدایی ادامه می‌یابد که در جداول زیر ارائه شده است.

	A	B	C	عرضه	جریمه۱	جریمه ۲
۱	۴	۱ ۱۰	۳	~~۱۰~~ ۰	۲	×
۲	۳	۲ ۱۰	۴	~~۲۵~~ ۱۵	۱	۱
۳	۳	۴	۲	۲۵	۱	۱
تقاضا	۳۰	~~۲۰~~ ~~۱۰~~ ۰	۱۰	۶۰		
جریمه۱	۰	۱	۱			
جریمه۲	۰	۲	۲			

	A	B	C	عرضه	جریمه۱	جریمه ۲	جریمه ۳
۱	۴	۱ ۱۰	۳	~~۱۰~~ ۰	۲		
۲	۳	۲ ۱۰	۴	~~۲۵~~ ۱۵	۱	۱	۱
۳	۳	۴	۲ ۱۰	~~۲۵~~ ۱۵	۱	۱	۱
تقاضا	۳۰	~~۳۰~~ ~~۱۰~~ ۰	~~۱۰~~ ۰	۶۰			
جریمه۱	۰	۱	۲				
جریمه۲	۰	۲	۲				
جریمه۳	۰		۲				

	A	B	C	عرضه	جریمه۱	جریمه ۲	جریمه ۳	جریمه ۴
۱	۴	۱ ۱۰	۳	~~۱۰~~ ۰	۲			
۲	۳ ۱۵	۲ ۱۰	۴	~~۲۵~~ ~~۱۵~~ ۰	۱	۱	۱	۳
۳	۳ ۱۵	۴	۲ ۱۰	~~۲۵~~ ~~۱۵~~ ۰	۱	۱	۱	۳
تقاضا	~~۳۰~~ ~~۱۵~~ ۰	~~۲۰~~ ~~۱۰~~ ۰	~~۱۰~~ ۰	۶۰				
جریمه۱	۰	۱	۲					
جریمه۲	۰	۲	۲					
جریمه۳	۰		۲					
جریمه ۴	۰							

*قابل ذکر است که تمامی مراحل بالا می‌تواند در یک جدول صورت گیرد و ارائه‌ی جداگانه‌ی جداول فوق تنها جنبه‌ی آموزشی داشت.

۲۲-روش پلّه سنگ

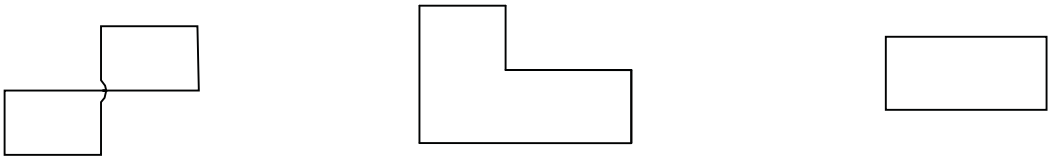
پس از بدست آوردن جواب اساسی موجه ابتدایی به یکی از روشهایی که شرح داده شد، باید جواب را با یکی از دو روش پله سنگ و یا توزیع تعدیل شده بهبود داد تا به جواب بهینه رسید. برای روش پلّه سنگ گامهای زیر را طی می‌کنیم:

گام ۱) یک خانه خالی (یک متغیر غیراساسی) را برای ارزیابی انتخاب کنید.

گام ۲) برای خانه خالی یک مسیر پلّه سنگ رسم کنید.

مشخصات این مسیر به شکل زیر است:

الف) مسیر پله سنگ مسیری است بسته و منحصر به فرد که دارای اضلاعی عمود بر هم است و عمدتاً به یکی از اشکال زیر می‌باشد.



ب)یکی ازگوشه‌های این مسیر در خانه خالی انتخابی(خانه غیراساسی) قرار گرفته و سایر گوشه‌ها باید در خانه‌های پر (خانه‌های اساسی) واقع گردند.

ج) به گوشه‌ای که در خانه خالی قرار گرفته علامت (+) اختصاص داده و به سایر گوشه‌ها، یکی در میان اول علامت منفی (-) و سپس (+) تخصیص دهید.

گام ۳) پس از تخصیص علامتهای مثبت و منفی به هزینه‌ها در هر مسیر پله سنگ، همه آنها را با هم جمع می‌کنیم. عدد حاصل ارزش خانه خالی را نشان میدهد.

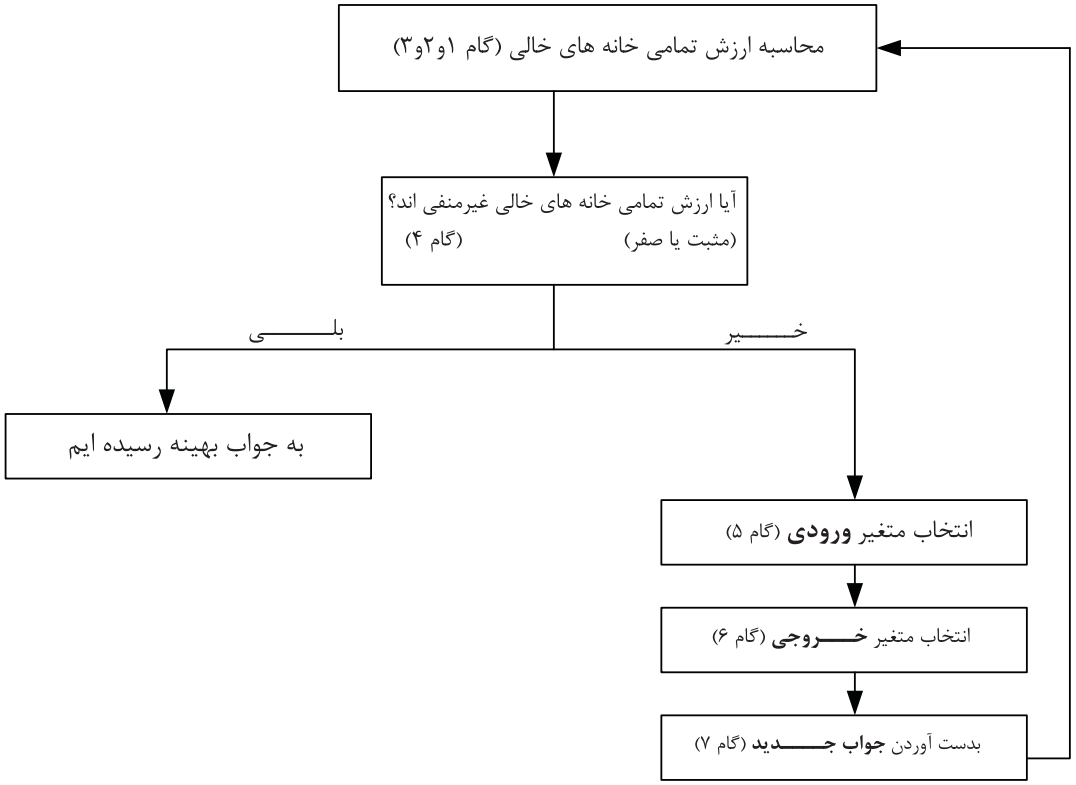
گام ۴) ارزش تمامی خانه‌های خالی را طبق گامهای فوق بدست آورید، اگر ارزش تمامی خانه‌های خالی عددی غیرمنفی بود به جواب بهینه رسیده‌اید، در غیر اینصورت جدول بهینه نبوده و برای بهبود جواب به گام بعد می رویم .

گام ۵) انتخاب متغیر ورودی: آن خانه خالی را که دارای منفی‌ترین ارزش محاسبه شده است را انتخاب کنید و متغیر مربوط به این خانه را متغیر ورودی بنامید.

گام ۶) انتخاب متغیر خروجی: از میان تمام خانه‌هایی که رأس مسیر پله سنگ خانه‌ی متغیر ورودی در آن قرار گرفته و دارای علامت منفی هستند، خانه‌ای را که دارای کمترین مقدار متغیر اساسی است را انتخاب کنید. متغیر مربوط به این خانه متغیر خروجی میباشد.

گام ۷) بدست آوردن جواب جدید: یک جدول جدید رسم کرده و مقدار خانه انتخابی در گام ۶ (مقدار متغیر خروجی) را از مقدار خانه‌هایی که دارای علامت (-) در رأس های مسیر پله سنگ مربوطه می‌باشند، کم و به مقدار خانه‌هایی که دارای علامت (+) هستند اضافه کنید. مقدار سایر خانه‌هایی که رأس‌های مسیر پله سنگ در آنها قرار نگرفته‌است را به همان صورت به جدول جدید منتقل کرده و به گام ۱ بروید. (۱ ص ۲۵۹،۲۶۰)

بصورت خلاصه، گام‌های فوق مطابق با فلوچارت زیر است:



مثال) سه شعبه از کارخانه‌ای (۱،۲،۳) می‌توانند محصولات خود را به سه شهر A,B,C ارسال کنند. میزان تولید هر یک از این کارخانه‌ها معادل جدول ۱ است. میزان تقاضای هر شهر هم در جدول ۲ آمده است. هزینه‌ی حمل هر واحد از کالا از هر کارخانه به هر شهر هم در جدول ۳ نشان داده شده است. استراتژی بهینه حمل مواد چیست و چه هزینه ای در بر دارد؟

کارخانه	۱	۲	۳
تولید	۱۰	۳۰	۲۵

جدول ۱

شهر	A	B	C
تقاضا	۲۰	۱۴	۳۱

جدول ۲

کارخانه \ شهر	A	B	C
۱	۵	۴	۶
۲	۴	۳	۶
۳	۵	۴	۳

جدول ۳

مشخص است که با یک مسأله حمل و نقل با تابع هدف حداقل سازی مواجهیم. جدول حمل و نقل را رسم کرده و جواب موجه ابتدایی را بدست می‌آوریم (از روش حداقل سطر محاسبه کردیم):

	A	B	C	
۱	۵	۴ ۱۰	۶	~~۱~~ ۰
۲	۴ ۲۰	۳ ۴	۶ ۶	~~۳~~ ~~۲۶~~ ~~۶~~ ۰
۳	۵	۴	۳ ۲۵	~~۲۵~~ ۰
	~~۲۰~~ ۰	~~۱۴~~ ~~۴~~ ۰	~~۳۱~~ ~~۲۵~~ ۰	

پس از بدست آوردن جواب موجه ابتدایی، به بهبود جواب می‌پردازیم تا به استراتژی بهینه حمل و نقل برسیم، در این بخش به خاطر آموزش روشها، این کار را توسط هر دو روش پله سنگ و MODI انجام داده و تمامی مراحل را به تفکیک نشان داده‌ایم:

حل با استفاده از روش پله سنگ:

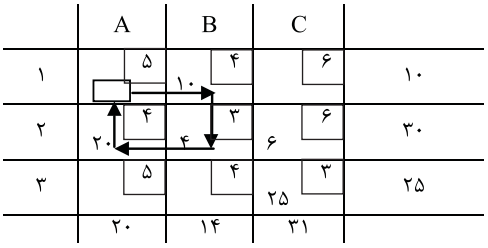
گامهای ۱و۲و۳)

طبق فلوچارت ارائه شده، ابتدا ارزش خانه‌های خالی را با استفاده از مسیر پله سنگ محاسبه می‌کنیم:

برای خانه‌ی (A-۱) مسیر پله سنگ به شکل مقابل بوده و ارزش آن بصورت زیر محاسبه می‌شود:

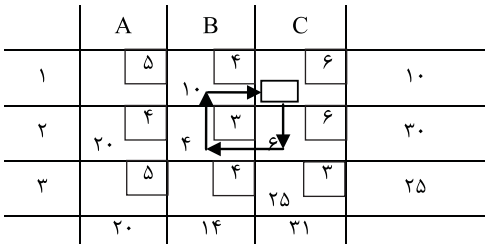
۰= ۴-۳+۴-۵ = ارزش خانه خالی (A-۱)

توجه کنید که برای محاسبه‌ی ارزش خانه خالی، بعد از رسم مسیر پله سنگ، خانه خالی آغاز مسیر علامت مثبت و خانه‌هایی که در رأس‌های مسیر قرار دارند به ترتیب علامت منفی، مثبت، منفی، مثبت و ..... می‌گیرند. و در نهایت همه آنها با هم جمع می‌شوند.



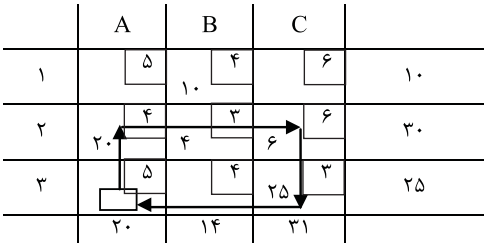
مسیر پله سنگ و ارزش خانه خالی (C-۱):

۱-= ۴-۳+۶-۶ : ارزش خانه خالی(C-۱)



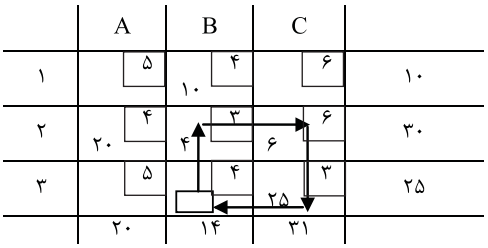
مسیر پله سنگ و ارزش خانه خالی (A-۳)

۴=۳-۶+۴-۵: ارزش خانه خالی (B-۳)



مسیر پله سنگ و ارزش خانه خالی (B-۳)

۴=۳-۶+۳-۴ : ارزش خانه خالی (B-۳)



* توجه کنید که برای هر خانه خالی فقط یک مسیر پله سنگ وجود دارد.

*برای هر خانه خالی حتماً یک مسیر پله سنگ وجود خواهد داشت.

*جهت حرکت فلش‌ها در مسیر پله سنگ تأثیری در محاسبات ندارد.

گام ۴) بخشی از این گام که مربوط به محاسبه‌ی ارزش خانه های خالی بود در بالا انجام گرفت.

مشاهده می‌شود که ارزش خانه‌ی خالی (C-۱) مقدار منفی است. در نتیجه جواب بهینه نیست و به گام ۵ می‌رویم.

گام ۵) با توجه به اینکه فقط خانه‌ی (C-۱) دارای ارزش منفی است، در نتیجه متغیر همین خانه X_{1C} ورودی است.

	A	B	C	
۱	۵	۴ ۱۰	۶	۱۰
۲	۴ ۲۰	۳ ۴	۶ ۶	۳۰
۳	۵	۴	۳ ۲۵	۲۵
	۲۰	۱۴	۳۱	

گام ۶) در مسیر پله سنگ خانه‌ی (C-۱)، سه خانه وجود دارد که با توجه به علامت‌های مثبت و منفی که به آنها دادیم، خانه‌های (B-۱) و (C-۲) در رئوس منفی قرار دارند مقدار متغیرهای اساسی این دو خانه به شکل زیر است:

$X_{1B}=۱۰$ و $X_{2C}=۶$

چون مقدار مربوط به X_{2C} کوچکتر است، این متغیر (و خانه مربوطه) خروجی هستند.

	A	B	C	
۱	۵	۴ ۴	۶ ۶	۱۰
۲	۴ ۲۰	۳ ۱۰	۶	۳۰
۳	۵	۴	۳ ۲۵	۲۵
	۲۰	۱۴	۳۱	

گام ۷) مقدار ۶ را از رئوس منفی مسیر کسر کرده و به رئوس مثبت آن اضافه می‌کنیم، در نتیجه این عمل، خانه‌ی X_{1C} اساسی شده و خانه‌ی X_{2C} غیر اساسی می گردد:

دور دوم:

گام ۱) مجدداً ارزش خانه‌های خالی را حساب می‌کنیم

(A -۱) ارزش خانه‌ی خالی : ۵-۴+۳-۴ = ۰

(C -۲) ارزش خانه‌ی خالی : ۶-۶+۴-۳ = ۱

(A -۳) ارزش خانه‌ی خالی : ۵-۴+۳-۴+۶-۳=۳

(B - ۳) ارزش خانه‌ی خالی : ۴-۴+۶-۳= ۳

(A -۱) ارزش خانه‌ی خالی: ۵-۴+۳-۴+۶-۳=۳

	A	B	C	
۱	۵	۴ ۴	۶ ۶	۱۰
۲	۴ ۲۰	۳ ۱۰	۶	۳۰
۳	۵	۴	۳ ۲۵	۲۵
	۲۰	۱۴	۳۱	

با توجه به مثبت بودن ارزش همه‌ی خانه‌های خالی، به بهترین جواب رسیده‌ایم.

*توجه کنید که مسیر پله سنگ خانه‌ی (A-۳) به شکل مقابل است.

بهترین استراتژی حمل و هزینه‌ی کل این استراتژی عبارتست از:

از کارخانه	به شهر	میزان حمل	هزینه حمل هر واحد	هزینه حمل
۱	B	۴	۴	۱۶
۱	C	۶	۶	۳۶
۲	A	۲۰	۴	۸۰
۲	B	۱۰	۳	۳۰
۳	C	۲۵	۳	۷۵
هزینه کل				۲۳۷

هزینه کل این استراتژی ۲۳۷ است

*توجه کنید که جدول فوق فقط برای ساده سازی نتایج رسم شده، وطبق استاندارد خاصی نیست.

۲۳-روش توزیع تعدیل شده (MODI)

در این روش برای هر سطر یک ضریب Ui و برای هر ستون یک ضریب Vj در نظر می‌گیریم. مقادیر Ui و Vj را با استفاده از رابطه‌ی Cij = Ui + vj که برای هر خانه‌ی اساسی جدول سیمپلکس نوشته می‌شود (و Ui و Vj مربوط به سطر و ستون آن خانه هستند) حساب می‌کنیم. برای این کار لازمست به یکی از متغیرها (معمولاً U_1)مقدار صفر اختصاص دهیم و بقیه Ui و Vjها را با استفاده از آن محاسبه نمائیم.

بعد از محاسبه کلیه Uiها و Vjها، ارزش خانه‌های خالی (غیر اساسی) با استفاده از فرمول زیر محاسبه می‌گردد:

$$\text{ارزش هر خانه خالی} = \left(C_{ij} - Z_{ij}\right) = C_{ij} - U_i - V_j$$

جواب هنگامی بهینه است که ارزش همه‌ی خانه‌های خالی بزرگتر یا مساوی صفر باشد. در غیر اینصورت، خانه‌ای که دارای منفی‌ترین مقدار است را بعنوان ورودی انتخاب می‌کنیم و حل را ادامه می‌دهیم. کلیه مراحل حل در گامهای زیر ارائه شده‌اند.

گامهای روش توزیع تعدیل شده (MODI)

گام۱- یک جواب موجه ابتدایی به دست آورید (با استفاده از روش گوشه شمال غربی، وگل یا ...)

گام ۲- برای هر سطر یک Ui و برای هر ستون یک Vj در نظر بگیرید و با استفاده از رابطه Cij = Ui + vj، که برای هر خانه پر (اساسی) جدول نوشته می‌شود، مقدار Uiها و Vjها را محاسبه کنید.

گام ۳- با استفاده از مقادیر بدست آمده از گام ۲، ارزش همه‌ی خانه‌های خالی را با کمک فرمول (Cij– Ui – vj) محاسبه کنید، اگر ارزش همه خانه‌های خالی مثبت بود به جواب بهینه رسیده‌ایم، در غیر اینصورت به گام ۴ بروید.

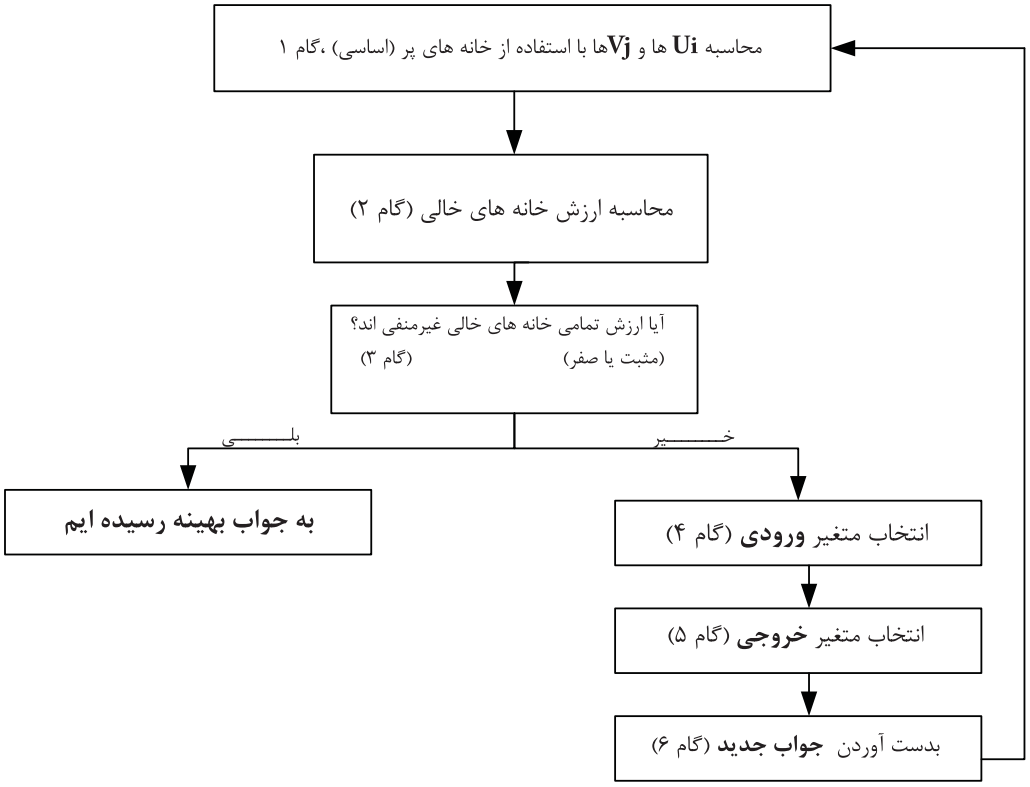
گام ۴- از میان خانه‌های غیر اساسی که ارزش آنها منفی است، خانه‌ای که دارای کمترین مقدار است را بعنوان متغیر ورودی انتخاب کنید.

گام ۵- برای خانه‌ی ورودی یک مسیر پله سنگ رسم کنید، در میان رأس‌های مسیر پله سنگ، آن خانه‌هایی که دارای علامت منفی هستند را در نظر بگیرید و از میان آنها خانه‌ای را انتخاب کنید که دارای کمترین مقدار است،این خانه، خروجی است (یادآوری : گوشه‌های مسیر پله‌سنگ یکی در میان علامت مثبت و منفی داشتند)

گام ۶- مقدار خانه انتخاب شده در گام ۵ را به مقدار خانه‌هایی که دارای علامت مثبت هستند اضافه و از مقدار خانه‌هایی که دارای علامت منفی هستند کم کنید تا جدول جدید حاصل شود. سپس به گام ۲ بروید. (یا به زبانی دیگر،مقدار خانه‌ی خروجی را به مقدار خانه‌هایی که در رأس‌های مثبت مسیر پله سنگ دارای علامت مثبت هستند،اضافه و از مقدار خانه هایی که در راس های منفی مسیر پله‌سنگ هستند کم کنید)

توضیح: در مورد بهینه بودن جواب در این روش، تنها در گام ۳ می‌توان اظهار نظر کرد.

فلوچارت روش توزیع تعدیل شده بصورت زیر است:



* روش پله سنگ و توزیع تعدیل شده، از نظر عملیاتی، فقط در نوع محاسبه‌ی ارزش خانه‌های خالی با هم تفاوت دارند و بقیه‌ی مراحل در دو روش مشابه هم است.

مثال) جواب نهایی جدول حمل و نقل زیر را با استفاده از روش توزیع تعدیل شده بدست آورید (مثال همان روش پله سنگ است)

مقاصد / مبادی	A	B	C	
۱	۵	۴	۶	۱۰
۲	۴	۳	۶	۳۰
۳	۵	۴	۳	۲۵
تقاضا	۲۰	۱۴	۳۱	

گام ۱- جواب موجه ابتدایی را از روش حداقل سطر محاسبه کردیم

مقاصد / مبادی	A	B	C	
۱	۵	۴ ۱۰	۶	۱۰
۲	۴ ۲۰	۳ ۴	۶ ۶	۳۰
۳	۵	۴	۳ ۲۵	۲۵
تقاضا	۲۰	۱۴	۳۱	

گام ۲-

مقاصد / مبادی	A	B	C		عرضه
۱	۵	۴ ۱۰	۶	۱۰	$U_۱$
۲	۴ ۲۰	۳ ۴	۶ ۶	۳۰	$U_۲$
۳	۵	۴	۳ ۲۵	۲۵	$U_۳$
تقاضا	۲۰	۱۴	۳۱		
	$V_۱$	$V_۲$	$V_۳$		

رابطه $Cij = Ui + vj$ را برای خانه‌های اساسی می‌نویسیم (V ستون آن خانه + U سطر آن خانه= ضریب هزینه خانه)

رابطه ۱- برای خانه‌ی ۱B $\quad ۴ = U_۱ + V_۲$

رابطه‌ی ۲ - برای خانه‌ی ۲A $\quad ۴ = U_۲ + V_۱$

رابطه‌ی ۳ - برای خانه‌ی ۲B $\quad ۳ = U_۲ + V_۲$

رابطه‌ی ۴ - برای خانه‌ی ۲C $\quad ۶ = U_۲ + V_۳$

رابطه‌ی ۵ - برای خانه‌ی ۳C $\quad ۳ = U_۳ + V_۳$

برای محاسبه‌ی مقادیر Ui و Vj ، ابتدا مقدار $U_۱$ را صفر قرار می‌دهیم (یا یک Ui یا Vj دیگر را) ، با صفر قرار دادن $U_۱$، با توجه به اینکه در رابطه ۱ ، یکی از مجهولها $U_۱$است، می‌توانیم مقدار ۰ را قرار داده و $V_۲$ را حساب کنیم، یعنی:

$$۴=U_۱+V_۲ \xrightarrow{U_۱=0} V_۲=۴$$

مقدار $V_۲$ (که حساب کردیم) را در رابطه‌ی ۳ قرار داده و مجهول دیگر را هم حساب می‌کنیم:

$$۳=U_۲+V_۲ \longrightarrow U_۲=-۱$$

پس تا اینجا داریم ($U_۱=۰$ و $V_۲=۴$ و $U_۲=-۱$)

به همین شیوه، بقیه‌ی مجهولها را هم حساب می‌کنیم:

رابطه ۴ $\quad ۶=U_۲+V_۳ \xrightarrow{U_۲=-۱} ۶=-۱+V_۳ \longrightarrow V_۳=۷$

رابطه‌ی ۵ $\quad ۳=U_۳+V_۳ \xrightarrow{V_۳=۷} ۳=U_۳+۷ \longrightarrow U_۳=-۴$

رابطه‌ی ۲ $\quad ۴=U_۲+V_۱ \xrightarrow{U_۲=-۱} ۴=-۱+V_۱ \longrightarrow V_۱=۵$

پس مقادیر متغیرها بصورت زیر است:

$U_۱=۰ \qquad V_۱=۵$

$U_۲=-۱ \qquad V_۲=۴$

$U_۳=-۴ \qquad V_۳=۷$

گام ۳- برای همه‌ی خانه‌های خالی، رابطه [ارزش هر خانه خالی] $= C_{ij}-U_i-V_j$ را نوشته و با استفاده از مقادیر Ui و Vj بدست آمده، ارزش خانه‌های خالی را محاسبه می‌کنیم:

	A	B	C	عرضه	Ui
۱	۵	۴ ۱۰	۶	۱۰	$U_۱=۰$
۲	۴ ۲۰	۳ ۴	۶ ۶	۳۰	$U_۲=-۱$
۳	۵	۴	۳ ۲۵	۲۵	$U_۳=-۲$
تقاضا	۲۰	۱۴	۳۱		
Vj	$V_۱=۵$	$V_۲=۴$	$V_۳=۵$		

ارزش خانه خالی ۱A $= C_{۱۱}-U_۱-V_۱=۵-۰-۵=۰$

ارزش خانه خالی ۱C $= C_{۱۳}-U_۱-V_۳=۶-۰-۷=-۱$

ارزش خانه خالی ۳A $= C_{۳۱}-U_۳-V_۱=۵-(-۴)-۵=۴$

ارزش خانه خالی ۳B $= C_{۳۲}-U_۳-V_۲=۴-(-۴)-۴=۴$

چون ارزش خانه خالی(۱C) منفی است، پس جواب بهینه نیست، حل را ادامه می دهیم.

گام ۴: متغیر ورودی را انتخاب می کنیم که همان خانه x_{1C} است.

گام ۵: مسیر پله سنگ را رسم کرده و متغیر خروجی را تعیین می کنیم.

	A	B	C	عرضه
۱	[۵]	۱۰ [۴]	[۶]	۱۰
۲	۲۰ [۴]	۴ [۳]	۶ [۶]	۳۰
۳	[۵]	[۴]	۲۵ [۳]	۲۵
تقاضا	۲۰	۱۴	۳۱	

(خانه ی ۱B و ۲C رئوس منفی مسیر پله سنگ هستند، از بین آنها آنکه دارای کوچکترین مقدار است را بعنوان خروجی انتخاب می کنیم)

گام ۶: جواب جدید را بدست می آوریم:

	A	B	C	عرضه
۱	[۵]	۴ [۴]	۶ [۶]	۱۰
۲	۲۰ [۴]	۱۰ [۳]	[۶]	۳۰
۳	[۵]	[۴]	۲۵ [۳]	۲۵
تقاضا	۲۰	۱۴	۳۱	

دور دوم:

گام ۱: ارزش خانه های پر را حساب می کنیم (ابتدا محاسبه مقادیر Ui و Vj)

$$۴ = U_۱ + V_۲$$

$$۶ = U_۱ + V_۳$$

$$۴ = U_۲ + V_۱$$

$$۳ = U_۲ + V_۲$$

$$۳ = U_۳ + V_۳$$

$\Rightarrow$

$U_۱=۰$ $\quad V_۱=۵$

$U_۲=-۱$ $\quad V_۲=۴$

$U_۳=-۳$ $\quad V_۳=۶$

سپس محاسبه ارزش خانه های خالی:

۱ - ارزش خانه خالی A $\quad$ ۵-۰-۵=۰

۲_ ارزش خانه خالی C $\quad$ ۶-(-۱)-۶=۱

۳- ارزش خانه خالی A $\quad$ - ۵ (-۳)-۵=۳

۳_ ارزش خانه خالی B $\quad$ ۴-(-۳)-۴=۳

چون ارزش همه خانه های خالی صفر است ، به جواب بهینه رسیده ایم.

۲۴-روش مجارستانی

شرایط لازم برای استفاده از روش مجارستانی برای حل مسائل تخصیص:

- هدف جدول تخصیص حداقل سازی باشد (اگر نبود چه کنیم؟ در ادامه توضیح داده می‌شود)
- تعداد سطرها و ستونهای جدول با هم برابر باشد (اگر نبود چه کنیم؟ سطر یا ستون مجازی اضافه کنیم)

در صورتی که شرایط بالادر مدل ما وجود داشت و یا آنها را مهیّا کردیم، مراحل زیر را طی می‌کنیم:

۱ - کوچکترین عدد هر سطر جدول را از تمامی اعداد آن سطر کم می‌کنیم

۲ - برای جدولی که از مرحله ۱ حاصل شود، کوچکترین عدد هر ستون را از تمامی اعداد آن ستون کم می‌کنیم.

۳ - تمامی صفرهای جدول را با کمترین تعداد خطوط پوشش بپوشانید، اگر تعداد این خطوط به اندازه سطرها یا ستونهای جدول باشد، جدول نهایی بدست آمده است، در غیر اینصورت به گام چهار بروید.
(توضیح خطوط پوشش: خطهایی افقی یا عمودی هستند که به منظور پوشاندن صفرها بر روی سطرها یا ستونهای جدول کشیده می‌شوند، هر کدام از این خطها مربوط به یک سطر یا یک ستون است و باید کل آن سطر یا ستون را بپوشاند، در هر جدول می‌توان از خطوط پوشش افقی و عمودی بصورت همزمان نیز استفاده کرد.)

۴ - کوچکترین عددی که در زیر خطوط پوششی قرار ندارد را از تمامی اعدادی که در زیر خطوط پوششی قرار ندارند کم کنید و به اعدادی که در تقاطع خطوط پوششی قرار دارند بیفزائید و اعدادی که بصورت عادی در زیر خطوط پوشش قرار دارند را بدون تغییر باقی بگذارید، سپس تمامی اعداد را در یک جدول جدید (بدون در نظر گرفتن خطوط پوشش) بنویسید.

-گام ۳ و ۴ را آنقدر تکرار کنید تا به جواب بهینه برسید (جوابی که تعدد خطوط پوشش در آن برابر با تعداد سطرها یا ستونهای جدول تخصیص باشد)

نحوه‌ی بدست آوردن جواب از جدول نهایی

در جدول نهایی، سطر یا ستونی را انتخاب کنید که یک صفر در آن و جود داشته باشد، دور آن صفر را خط بکشید و سطر مربوطه را به ستون مربوطه تخصیص دهید، سپس روی سطر و ستون تخصیص یافته خط بکشید. این کار را آنقدر تکرار کنید که تمامی سطرها به تمامی ستونها تخصیص یابند. (این راه حل آسان است و معمولاً جوابگو است، اینکه در یک سطر یا ستون فقط یک صفر باشد اهمیت زیادی ندارد و تنها جهت ساده‌تر کردن انتخاب تخصیص‌ها است، چیزی که ضروری است اینست که خانه‌های تخصیص یافته در جدول نهایی، همگی باید دارای هزینه صفر باشند)

مثال:

چهار شغل (A,B,C,D) وجود دارد که چهار فرد (۱،۲،۳،۴) نسبت به انجام آنها اعلام آمادگی کرده‌اند. هر کدام از افراد برای انجام هر کدام از کارها حقوقی درخواست داده‌اند که در جدول زیر آمده است، کدام فرد را به کدام کار اختصاص دهیم تا کمترین هزینه را در بر داشته باشد؟

(توضیح: بعنوان مثال فرد ۱ برای شغل A حقوق ۲ را می‌خواهد و فرد ۲ برای شغل C، ۶ واحد پولی حقوق می‌خواهد)

فرد \ شغل	A	B	C	D
۱	۲	۴	۳	۱
۲	۵	۲	۶	۳
۳	۴	۱	۵	۴
۴	۳	۲	۶	۳

حل:

* قبل از هر چیز توجه کنید که عرضه‌ی هر سطر ۱ است یعنی هر فرد داوطلب فقط یک کار می باشد ، تقاضای هر ستون هم ۱ است یعنی ۱ فرد برای یک شغل لازمست.

*چهار سطر و چهار ستون وجود دارد، از اینرو نیازی به سطر یا ستون مجازی نداریم.

*هدف ما حداقل سازی هزینه است، از اینرو به راحتی و بدون هیچ تغییری می‌توان از روش مجارستانی برای حل آن استفاده کرد.

مراحل حل:

مرحله ۱) در سطر اول، عدد یک از همه اعداد کوچکتر است، از اینرو آن را از تمام اعداد آن سطر کسر می‌کنیم. در سطر دوم عدد ۲ را از همه اعداد سطر کسر می‌کنیم و .....

	A	B	C	D
۱	۱	۳	۲	۰
۲	۳	۰	۴	۱
۳	۳	۰	۴	۳
۴	۱	۰	۴	۱

مرحله ۲) برای جدولی که از مرحله قبل بدست آمد، در ستون اول (ستونA)
عدد یک از همه کوچکتر است، از اینرو آنرا از همه اعداد این ستون کم می‌کنیم،
برای ستون دوم عدد ۰ و ...

	A	B	C	D
۱	۰	۳	۰	۰
۲	۲	۰	۲	۱
۳	۲	۰	۲	۳
۴	۰	۰	۲	۱

(ستون دوم و چهارم بدون تغییر باقی ماندند چون کم کردن عدد ۰ از اعداد این دو ستون تغییری در اعداد آنها بوجود نیاورد)

مرحله ۳) تمامی صفرهای جدول را با حداقل تعداد خطوط پوششی می‌پوشانیم شکل زیر جدول را نشان می‌دهد در حالیکه همه صفرها با خطوط پوششی پوشانیده شده‌اند.

	A	B	C	D
۱	۰	۳	۰	۰
۲	۲	۰	۲	۱
۳	۲	۰	۲	۳
۴	۰	۰	۲	۱

یا

	A	B	C	D
۱	۰	۳	۰	۰
۲	۲	۰	۲	۱
۳	۲	۰	۲	۳
۴	۰	۰	۲	۱

اما خطوط پوششی در شکل‌های بالا در کمترین مقدار ممکن نیستند ، همه‌ی صفرهای جداول بالارا می‌توان حداقل با سه خط پوششی به شکل زیر پوشاند:

	A	B	C	D
۱	۰	۳	۰	۰
۲	۲	۰	۲	۱
۳	۲	۰	۲	۳
۴	۰	۰	۲	۱

یا

	A	B	C	D
۱	۰	۳	۰	۰
۲	۲	۰	۲	۱
۳	۲	۰	۲	۳
۴	۰	۰	۲	۱

(تعداد خطوط پوششی= ۳) و (تعداد سطرها= تعداد ستونها= ۴)

با توجه به اینکه حداقل تعداد خطوط پوششی ممکن کمتر از تعداد سطرها یا ستونها است حل را در مرحله ۴ ادامه می‌دهیم.

(اینکه حل را با کدامیک از دو جدول بالا ادامه دهیم، فرقی نمی‌کند و تأثیری در جواب نهایی ندارد، چیزی که مهم است اینست که حداقل تعداد خطوط پوششی ممکن در نظر گرفته شود)

مرحله ۴)

برای این مرحله جدول مقابل (از مرحله ۳) را در نظر می‌گیریم.

	A	B	C	D
۱		۳		
۲	۲	۰	۲	۱
۳	۲	۰	۲	۳
۴	۰	۰	۲	۱

از بین اعدادی که در زیر خطوط پوششی قرار ندارند (اعداد نشان داده شده در جدول مقابل) کوچکترین عدد را انتخاب می‌کنیم،این عدد یک است.

	A	B	C	D
۱				
۲			۲	۱
۳			۲	۳
۴			۲	۱

عدد ۱ را از اعدادی که در زیر خطوط پوششی قرار ندارند (همان اعداد جدول بالا) کم می‌کنیم

	A	B	C	D
۱				
۲			۱	۰
۳			۱	۲
۴			۱	۰

عدد ۱ را به اعدادی که در تقاطع خطوط پوشش قرار دارند اضافه می‌کنیم:

	A	B	C	D
۱	۱	۴		
۲				
۳				
۴				

اعداد زیر خطوط پوششی نیز بدون تغییر باقی می‌مانند.

	A	B	C	D
۱			۰	۰
۲	۲	۰		
۳	۲	۰		
۴	۰	۰		

در نتیجه جدول زیر حاصل می‌شود:

	A	B	C	D
۱	۱	۴	۰	۰
۲	۲	۰	۱	۰
۳	۲	۰	۱	۲
۴	۰	۰	۱	۰

حال لازمست مجدداً به گام ۳ بازگردیم،به شکلهای مختلفی می‌توان تمامی صفرها را با خطوط پوشش پوشاند و در همه آنها حداقل ۴ خط پوشش لازمست در نتیجه به جدول نهایی رسیده‌ایم، بعنوان مثال، حالتهای زیر امکانپذیرند:

	A	B	C	D
۱	۱	۴	۰	۰
۲	۲	۰	۱	۰
۳	۲	۰	۱	۲
۴	۰	۰	۱	۰

یا

	A	B	C	D
۱	۱	۴	۰	۰
۲	۲	۰	۱	۰
۳	۲	۰	۱	۲
۴	۰	۰	۱	۰

حال که به جدول نهایی رسیدیم باید تخصیص‌های بهینه را انتخاب کنیم، سطر سوم سطری است که تنها یک صفر در آن وجود دارد، دور آن صفر خط می‌کشیم و سطر مربوطه را به ستون مربوطه تخصیص میدهیم (سطر سوم به ستون دوم) همچنین این سطر و ستون را در تخصیص‌های بعدی نادیده می‌گیریم چون تخصیص مربوط به آنها انجام پذیرفته است.

*در ستون اول و سوم نیز فقط یک صفر وجود داشت که می‌شد تخصیص را از آنها شروع کرد. اما این موضوع تأثیری بر مقدار جواب ندارد.

	A	B	C	D
۱	۱	۴	۰	۰
۲	۲	۰	۱	۰
۳	۲	۰	۱	۲
۴	۰	۰	۱	۰

در سطر دوم نیز فقط یک صفر وجود دارد، در نتیجه دور آن خانه را نیز خط می‌کشیم و سطر دوم را به ستون چهارم اختصاص میدهیم.

	A	B	C	D
۱	۱	۴	۰	۰
۲	۲	۰	۱	۰
۳	۲	۰	۱	۲
۴	۰	۰	۱	۰

تخصیص مربوط به سطر اول را هم انجام میدهیم

	A	B	C	D
۱	۱	۴	۰	۰
۲	۲	۰	۱	۰
۳	۲	۰	۱	۲
۴	۰	۰	۱	۰

تخصیص مربوط به سطر چهارم را هم انجام میدهیم

	A	B	C	D
۱	۱	۴	۰	۰
۲	۲	۰	۱	۰
۳	۲	۰	۱	۲
۴	۰	۰	۱	۰

تخصیص‌های صورت گرفته بصورت خلاصه در جدول زیر ارائه شده‌اند.

سطر (فرد)	ستون (شغل)
۱	C
۲	D
۳	B
۴	A

برای محاسبه‌ی هزینه تخصیص صورت گرفته، هزینه‌های مربوط به هر خانه تخصیص یافته (اساسی) را از جدول اصلی سوال (صورت سوال) می‌نویسیم و همگی را با هم جمع می‌کنیم:

سطر (فرد)	ستون (شغل)	هزینه
۱	C	۳
۲	D	۳
۳	B	۱
۴	A	۳
		۱۰

پس بهترین حالت تخصیص هزینه‌ای معادل با ۱۰ را برای ما در بر دارد.

۲۵- روش جدولی

یکی از روشها برای حل مسائل کوتاهترین مسیر، روش جدولی است. این روش دارای گامهای زیر است:

۱ - یک جدول تشکیل دهید که به تعداد گره‌ها ستون دارد و در بالای ستون نام گره را بنویسید. در هر ستون، تمام شاخه‌هایی‌که از آن گره منشعب شده‌اند را، به ترتیب، از کمترین مقدار بنویسید (بغیر از آنهایی که به مبدأ ختم می‌شوند)

۲ - به گره مبدأ مقدار دائمی صفر را تخصیص داده و آنرا در بالای ستون بنویسید. در این ستون شاخه‌ای را که دارای کمترین مقدار است را انتخاب کرده و دور آن دایره بکشید. به گرهی که این شاخه بدان ختم می‌شود بروید و مقدار این شاخه را بعنوان ارزش دائمی در بالای این ستون بنویسید. سپس در تمامی جدول، همه‌ی شاخه‌هایی که به این ستون (گره‌ی مقصد شاخه‌ی موردنظر) ختم می‌شوند را خط بزنید.

۳ - اگر گره جدید، گره مقصد است به گام پنجم روید و در غیر اینصورت به گام چهارم بروید.

۴ - تمامی ستونهایی که به آنها مقداری دائمی تخصیص داده شده و در آنها شاخه‌هایی آزاد (بدون دایره یا خط خوردگی) وجود دارد را در نظر بگیرید.
برای هر کدام از ستونهایی که دارای چنین شرطی هستند، ارزش موقت را با استفاده از رابطه‌ی زیر حساب کنید:

ارزش دائمی ستون + مقدار کمترین شاخه‌ی آزاد ستون = ارزش موقت ستون

هر ارزش موقت را در بیرون و بالای ستون مربوطه‌اش بنویسید. ستونی که دارای کمترین ارزش موقت است را به شکل زیر بررسی کنید:
در این ستون، شاخه‌ی آزادی که دارای کمترین مقدار است را در نظر گرفته و دور آن دایره بکشید (این ستون را ستون i در نظر بگیرید)، به ستونی که شاخه‌ی انتخاب شده بدان ختم می‌شود بروید و ارزش موقت ستون i را بعنوان ارزش دائمی این ستون بنویسید، سپس در تمام جدول ، تمامی شاخه‌هایی که به این ستون ختم می‌شوند را خط بزنید (این پاراگراف تا حدودی همانند گام ۲ است)

این گام را آنقدر تکرار کنید که به تمام ستونها«مقدار»تخصیص داده شود.

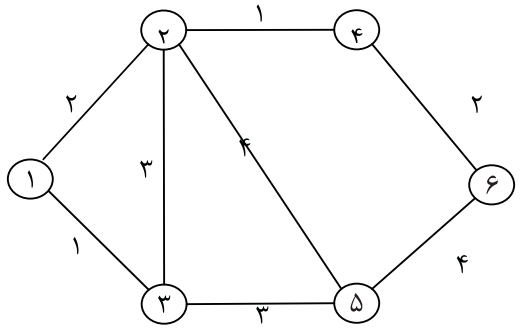
۵ - مقدار Z^* کوتاهترین مسیر، مقدار ارزش دائمی محاسبه شده برای ستون (گره) مقصد می‌باشد. برای پیدا کردن کوتاهترین مسیر، از گره مقصد شروع کرده و با استفاده از شاخه‌هایی که به دور آنها خط کشیده شده، طی یک مسیر پسرو کوتاهترین مسیر را بیابید.

توضیحات جانبی :

*تعیین ارزش موقت برای ستونها جهت انتخاب شاخه می‌باشد و ارزش موقت ستونها در هر بار تکرار گام چهارم ممکن است تغییر کند.

* ارزش دائمی فقط یک بار برای هر ستون تعیین می‌گردد.

مثال) شبکه زیر فاصله‌ی بین شهرهای ۱ تا ۶ را نشان می‌دهد. می‌خواهیم بدانیم کوتاهترین مسیر بین گره ۱ تا ۶ کدام است؟



حل از طریق روش جدولی

گام ۱) تشکیل جدول

شماره ستون(گره)	۱	۲	۳	۴	۵	۶
شاخه‌ها و ارزش آنها	(۱-۳)۱ (۱-۲)۲	(۲-۴)۱ (۲-۳)۳ (۲-۵)۴	(۳-۲)۳ (۳-۵)۳	(۴-۲)۱ (۴-۶)۲	(۵-۳)۳ (۵-۲)۴ (۵-۶)۴	(۶-۴)۲ (۶-۵)۴

توضیحات:

*برای هر ستون، شاخه‌هایی که به مبدأ ختم می‌شوند را نمی‌نویسیم مثلاً در ستون دوم، شاخه‌ی (۱-۲) نوشته نشد.

*می‌توانیم شاخه‌های مربوط به ستون ۶ را ننویسیم، چون این ستون مقصد است و وقتی به آن برسیم دیگر نیازی به رفتن به شاخه‌های دیگر را نداریم.

گام ۲)

ارزش دائمی ستون	۰		۱			
شماره/ ستون(گره)	۱	۲	۳	۴	۵	۶
شاخه‌ها و ارزش آنها	(۱-۳)۱ (۱-۲)۲	(۲-۴)۱ ~~(۲-۳)۳~~ (۲-۵)۴	(۳-۲)۳ (۳-۵)۳	(۴-۲)۱ (۴-۶)۲	~~(۵-۳)۳~~ (۵-۲)۴ (۵-۶)۴	(۶-۴)۲ (۶-۵)۴

* به ستون اول ارزش دائمی صفر دادیم. کمترین مقدار شاخه در این ستون شاخه‌ی (۳-۱) است که مقدار ۱ دارد . دور این شاخه را دایره می‌کشیم و به ستون ۳ رفته و ارزش دائمی آنرا ۱ قرار می‌دهیم.

*در تمامی ستونها، شاخه‌هایی که به ۳ ختم می‌شوند را خط می‌زنیم (مثلاً شاخه‌ی (۳-۲) در ستون دوم)

گام ۳)

گره ۳ گره مقصد نیست (مقصد ۶ است) پس به گام ۴ می‌رویم .

گام ۴)

ارزش های موقت

۲=(۰+۲) ۳=(۳+۱)

ارزش دائمی ستون	۰		۱			
شماره/ ستون(گره)	۱	۲	۳	۴	۵	۶
شاخه‌ها و ارزش آنها	(۱-۳)۱ (۱-۲)۲	(۲-۴)۱ ~~(۲-۳)۳~~ (۲-۵)۴	(۳-۲)۳ (۳-۵)۳	(۴-۲)۱ (۴-۶)۲	~~(۵-۳)۳~~ (۵-۲)۴ (۵-۶)۴	(۶-۴)۲ (۶-۵)۴

بر روی ستونهای اول و سوم عملیاتی صورت گرفته و دارای ارزش دائمی هستند و همچنین دارای شاخه‌ی آزاد هستند (شاخه‌هایی که نه دایره دارند و نه خط خورده‌اند)، از اینرو برای این دو ستون باید ارزش موقت تعیین شود.

در ستون اول، کمترین مقدار شاخه‌ها (که آزاد است)، ۲ می‌باشد، پس ارزش موقت این ستون بصورت زیر است:

ارزش دائمی ستون + مقدار کمترین شاخه‌ی آزاد آن ستون = ارزش موقت ستون

۲=۰+۲ = ارزش موقت ستون ۱

و همچنین ارزش موقت ستون ۳ را هم حساب می‌کنیم:

۴=۳+۱ = ارزش موقت ستون ۳

با توجه به اینکه ارزش موقت ستون اول کمتر است،در این ستون شاخه‌ی آزادی که دارای کمترین مقدار است را انتخاب می‌نمائیم و دورش را دایره می‌کشیم. ارزش موقت این ستون را برداشته و بعنوان ارزش دائمی ستونی که شاخه‌ی مورد نظر بدان ختم می‌شود می‌نویسیم.

سپس در تمامی جدول،شاخه‌هایی که به این گره ختم می‌شوند را خط می‌زنیم:

۲ ۳

ارزش دائمی ستون	۰	۲	۱			
شماره/ ستون(گره)	۱	۲	۳	۴	۵	۶
شاخه‌ها و ارزش آنها	(۱-۳)۱ (۱-۲)۲	(۲-۴)۱ ~~(۲-۳)۳~~ (۲-۵)۴	~~(۳-۱)۳~~ (۳-۵)۳	~~(۴-۳)۱~~ (۴-۶)۲	~~(۵-۳)۳~~ ~~(۵-۲)۴~~ (۵-۶)۴	(۶-۴)۲ (۶-۵)۴

تکرار گام ۴) چون تمامی ستونها دارای مقدار دائمی نیستند، گام ۴ را تکرار می‌کنیم. ستونهای۳و۲و۱ دارای ارزش دائمی هستند، اما در ستون ۱ هیچ شاخه‌ی آزادی وجود ندارد، از اینرو ارزش موقت را برای ستونهای۲،۳ تعیین کرده و در بالای جدول می‌نویسیم. همانطور که مشاهده می‌گردد، ارزش موقت ستون ۲ کمتر است. از اینرو شاخه‌ی (۴-۲) را انتخاب می‌کنیم. به ستون چهار می‌رویم و ارزش موقت ستون ۲ را بعنوان ارزش دائمی ستون ۴ می‌نویسیم و با خط زدن شاخه‌هایی که به ستون ۴ ختم می‌شوند، عملیات را تکمیل می‌کنیم:

		۱+۲=۳	۳+۱=۴			
ارزش دائمی ستون	۰	۲	۱	۳		
شماره/ ستون(گره)	۱	۲	۳	۴	۵	۶
شاخه‌ها و ارزش آنها	(۱-۳)۱ (۱-۲)۲	(۲-۴)۱ ~~(۲-۳)۳~~ (۲-۵)۴	~~(۳-۲)۳~~ (۳-۵)۳	~~(۴-۲)۱~~ (۴-۶)۲	~~(۵-۳)۳~~ ~~(۵-۲)۴~~ (۵-۶)۴	~~(۶-۴)۲~~ (۶-۵)۴

تکرار گام ۴)

		۴+۲=۶	۳+۱=۴	۲+۳=۵		
ارزش دائمی ستون	۰	۲	۱	۳	۴	
شماره/ ستون(گره)	۱	۲	۳	۴	۵	۶
شاخه‌ها و ارزش آنها	(۱-۳)۱ (۱-۲)۲	(۲-۴)۱ ~~(۲-۳)۳~~ ~~(۲-۵)۴~~	~~(۳-۲)۳~~ (۳-۵)۳	~~(۴-۲)۱~~ (۴-۶)۲	~~(۵-۳)۳~~ ~~(۵-۲)۴~~ ~~(۵-۶)۴~~	~~(۶-۴)۲~~ (۶-۵)۴

تکرار گام ۴)

ارزش دائمی ستون	۰	۲	۱	۳	۴	۵
شماره/ ستون(گره)	۱	۲	۳	۴	۵	۶
شاخه‌ها و ارزش آنها	(۱-۳)۱ (۱-۲)۲	(۲-۴)۱ ~~(۲-۳)۳~~ ~~(۲-۵)۴~~	~~(۳-۲)۳~~ (۳-۵)۳	~~(۴-۲)۱~~ (۴-۶)۲	~~(۵-۳)۳~~ ~~(۵-۲)۴~~ ~~(۵-۶)۴~~	~~(۶-۴)۲~~ ~~(۶-۵)۴~~

به ستون ششم رسیدیم (و تمامی ستونها دارای مقدار شدند)، پس حل به اتمام رسیده است.

گام ۵)

مقدار Z^* یا همان کوتاهترین مسیر برابر با مقدار دائمی ستون ششم است که ۵ می‌باشد.

برای یافتن شاخه‌های مسیر، شاخه‌هایی که به دور آنها دایره کشیده شده را در نظر می‌گیریم و از انتها به ابتدا حرکت می‌کنیم. یعنی می‌بینیم کدام شاخه‌ما را به گره ۶ رسانده است. این شاخه، شاخه‌ی (۶-۴) در ستون چهارم است. حال (در بین شاخه‌هایی که به دور آنها دایره کشیده شده) می‌بینیم که کدام شاخه ما را به گره ۴ آورده است. این شاخه، (۴-۲) است. و بعد می‌بینیم که کدام شاخه ما را به گره ۲ آورده است، این شاخه نیز (۲-۱) می‌باشد، پس داریم:

کوتاهترین مسیر ۶ ← ۴ ← ۲ ← ۱ با هزینه‌ی ۵

۲۶- روش نشانه‌گذاری (Labling)

روش نشانه‌گذاری یکی از روشهای حل مسائل کوتاهترین مسیر در مدلهای شبکه می‌باشد. برای ارائه مراحل این روش لازمست ابتدا با تعاریف زیر آشنا شویم:

نشانه: برای هرگرهی که در شبکه وجود دارد نشانه اختصاص می‌یابد، این نشانه شامل دو عدد است که عدد سمت چپ آن بیانگر فاصله گره مبدأ تا گرهی است که برای آن نشانه زده می‌شود و عدد سمت راست بیانگر شماره گره ماقبل است.

نشانه موقت: نشانه های ابتدایی اختصاص یافته به گره‌ها،(بجز گره مبدأ)«نشانه موقت» نامیده می شوند.

نشانه دائم: هر گاه کوتاهترین فاصله (یعنی بهترین مسیر) از مبدأ تا آن گره معین شود ، نشانه موقت به **نشانه دائم** تبدیل می‌شود.

*توجه کنید که در این روش، محاسبات بر مبنای گره های دائم انجام می گیرد.

مراحل روش نشانه گذاری:

۱ - به گره اول نشانه (۱و۰) اختصاص می‌دهیم و آنرا دائمی می کنیم.

۲ - به تمامی گره‌هایی که هنوز دائمی نشده‌اند و بدون واسطه (فقط از طریق شاخه) به گره‌های دائمی متصلند، نشانه موقت می‌دهیم. اعداد این نشانه موقت بصورت زیر محاسبه می‌گردند:

[(شماره گره دائمی که از آنجا به این گره آمده ایم)؛ (عدد سمت چپ گره دائمی قبل که از آنجا به این گره آمده‌ایم+ طول شاخه‌ای که از طریق آن به این گره آمده ایم)]

*در این مرحله ممکن است برای برخی گره‌ها چند نشانه موقت پیش بیاید، از میان این نشانه‌ها، نشانه‌ای که عدد سمت چپ کوچکتری دارد باقی می‌ماند و بقیه را خط می‌زنیم.

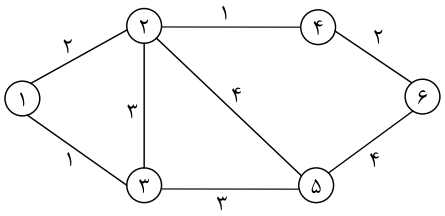
۳ - در میان گره‌هایی که دارای نشانه موقت هستند گرهی که دارای کمترین فاصله تا مبدأ است (کوچکترین عدد سمت چپ)را انتخاب کرده و آنرا بوسیله کشیدن یک خط به دورش دائمی می‌کنیم.

*گامهای ۳و۲ را آنقدر تکرار کنید تا همه گره‌ها دائمی شوند. اگر همه گره‌ها دائمی هستند به گام ۴ بروید.

۴ - با توجه به مفهوم عدد سمت راست در یک نشانه، از گره مقصد به گره قبل از آن برگردید(به گرهی که عدد سمت راست نشانه ی فعلی بیان می کند باز گردید) و این کار را آنقدر ادامه دهید تا به گره مبدأ برسید. این مسیر کوتاهترین مسیر بین مبدأ و مقصد است.

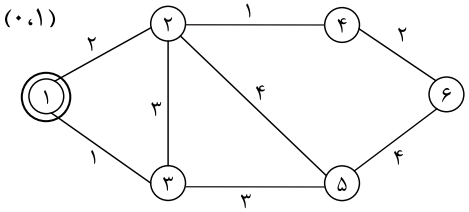
همچنین عدد سمت چپ گره مقصد نیز طول کوتاهترین مسیر بین مبدأ و مقصد را نشان می‌دهد.

مثال) شبکه زیر فاصله بین شهرهای ۱ تا ۶ را نشان می‌دهد. می‌خواهیم بدانیم کوتاهترین مسیر بین گره ۱ تا ۶ کدام است؟

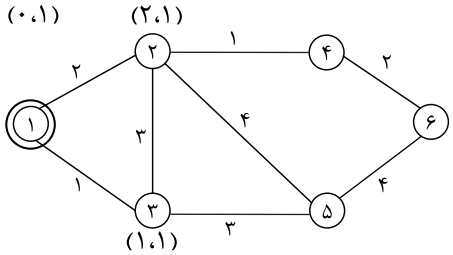


حل از طریق روش نشانه گذاری:

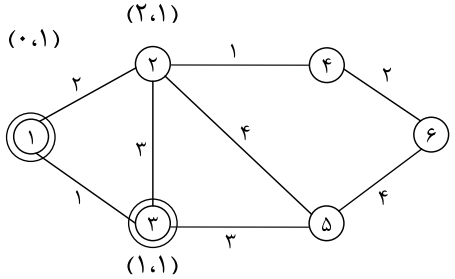
گام ۱) گره اول را دائمی می کنیم:



گام ۲) گره ۲ و ۳ بدون واسطه به گره دائمی شماره ۱ متصل هستند، از اینرو به هر دو آنها نشانه موقت می دهیم.

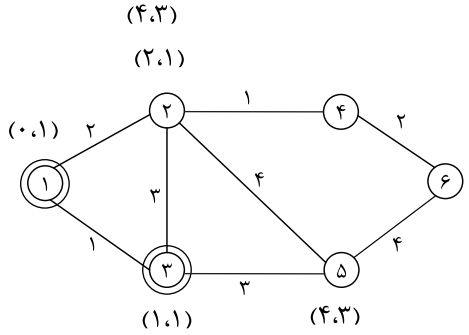


گام ۳) از میان این دو گره ،گره شماره ۳ دارای کمترین فاصله تا مبدأ است (عدد سمت چپ نشانه آن کوچکتر از عدد سمت چپ نشانه موقت گره دوم است)، از اینرو این گره را دائم می‌کنیم.

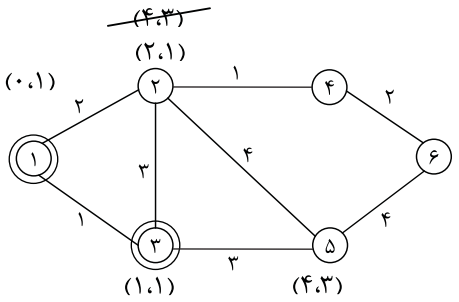


*همه گره‌ها دائمی نیستند ،از اینرو گام ۲و۳ را مجدداً تکرار می‌کنیم.

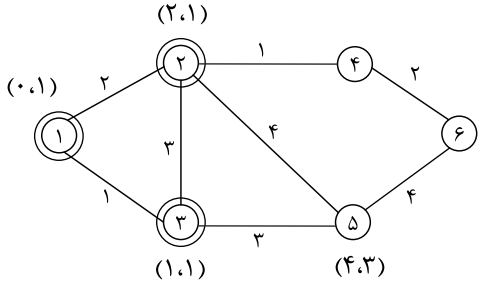
تکرار گام ۲) گره‌های غیر دائمی ۵،۲ بدون واسطه به گره دائمی ۳ متصل هستند، از اینرو به آنها نشانه موقت می‌زنیم.



*توجه کنید که گره ۲ دارای دو نشانه موقت است که یکی از آنها بیانگر حرکت از گره ۱ به ۲ و دیگری مربوط به حرکت از گره ۳ به ۲ است. نشانه‌ی موقتی که بیانگر حرکت از ۱ به ۲ است دارای عدد سمت چپ کوچکتری است، از اینرو نشانه موقت (۴،۳) را خط می‌زنیم.

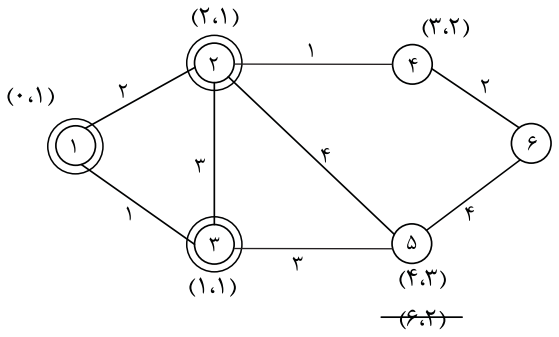


تکرار گام ۳) دو نشانه موقت وجود دارد، چون عدد سمت چپ نشانه‌ی گره دوم کوچکتر است، آنرا دائمی می‌کنیم:

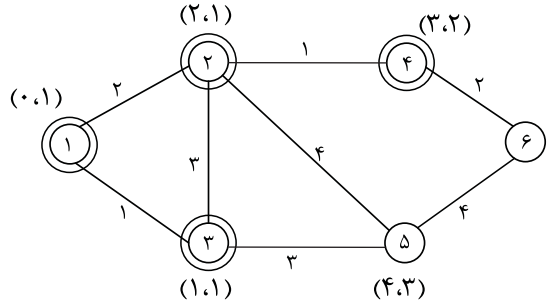


تکرار گام ۲) به گره های ۴،۵ به ازای حرکت از گره ۲ نشانه موقت می‌زنیم:

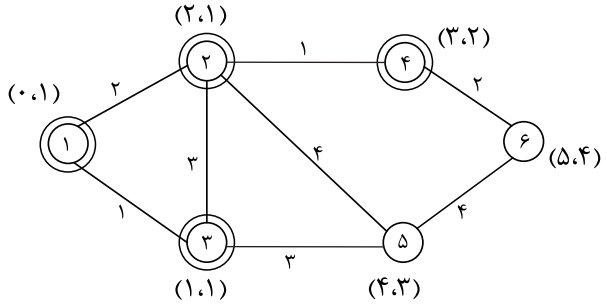
* نشانه (۶،۲) گره پنجم خط می‌خورد



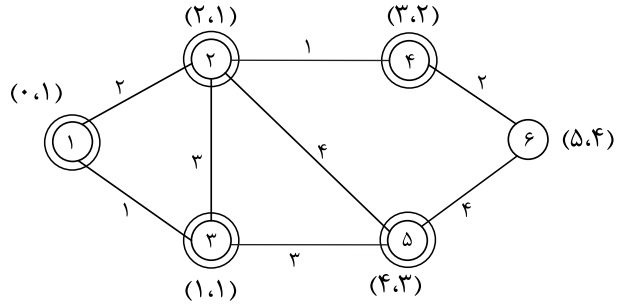
تکرار گام ۳) گره موقت ۴ دائمی می‌شود.



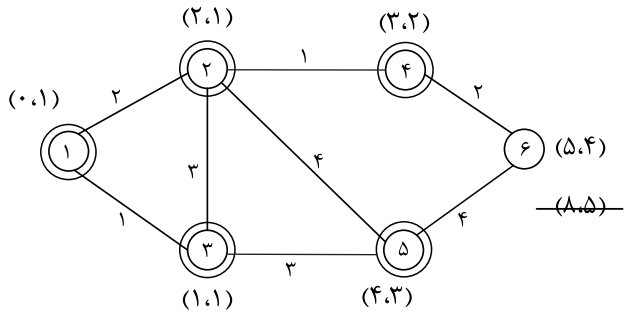
تکرار گام ۲) به گره ۶ به ازای حرکت از گره ۴ نشانه موقت می زنیم



تکرارگام ۳) گره ۵ دائمی می شود

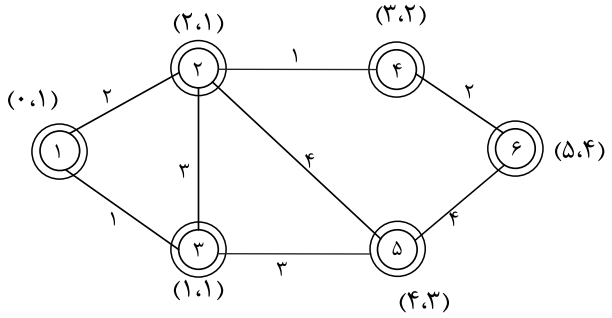


تکرار گام ۲) به گره ۶ به ازای حرکت از گره دائمی ۵ نشانه موقت می‌زنیم



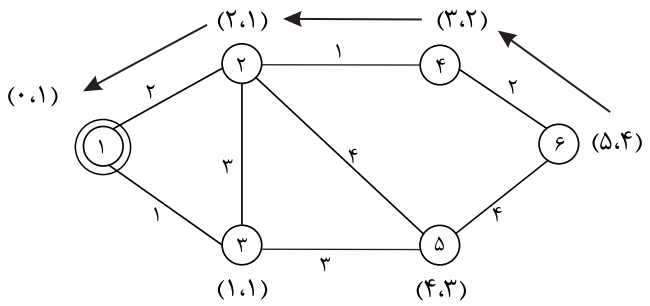
تکرار گره ۳)

گره شماره ۶ هم دائمی می شود



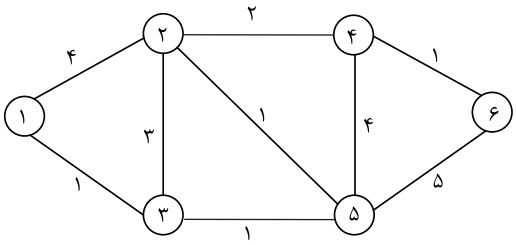
مراحل حل به اتمام رسیده ولازمست مسیر تعیین شود:

در گره مقصد (گره ۶) به نشانه توجه می کنیم، گره قبلی که در این نشانه بیان شده است (عدد سمت راست نشانه) گره ۴ است، به گره چهار می رویم و به نشانه آن توجه می‌کنیم، گره قبلی که در این نشانه بیان شده گره ۲ است، به گره ۲ می‌رویم، گره قبلی که در نشانه گره ۲ بیان شده گره ۱ است، در نتیجه کوتاهترین مسیر عبارتست از ۶ ← ۴ ← ۲ ← ۱ و هزینه ی آن مجموع فاصله های این مسیر (۵=۲+۱+۲) یا عدد سمت چپ نشانه گره ۶ است.



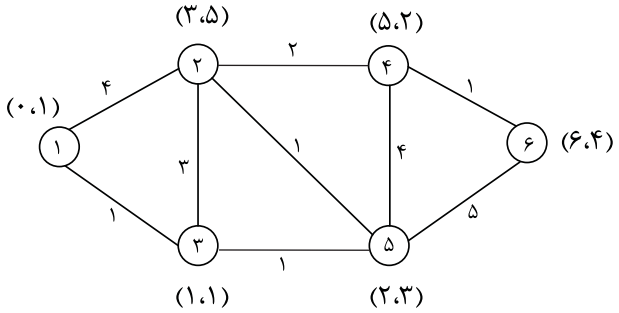
*توجه : قابل ذکر است که تمامی مراحل بالا روی یک شبکه انجام می‌پذیرد و قرار دادن مراحل حل بر روی شبکه‌های متعدد تنها به منظور یادگیری بوده است.

تمرین: کوتاهترین مسیر را در شبکه زیر بیابید:



پاسخ: کوتاهترین مسیر ۶ ← ۴ ← ۲ ← ۵ ← ۳ ← ۱

هزینه کوتاهترین مسیر : ۶

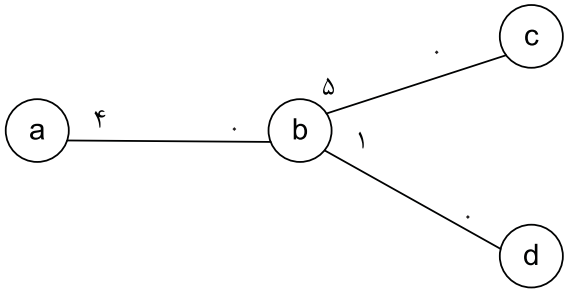


۲۷- الگوریتم حداکثر جریان

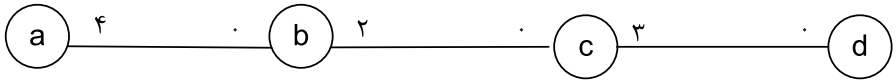
در مسائل حداکثر جریان دانستن نکات زیر ضروری است:

۱) عدد ابتدای هر شاخه نشان دهنده ظرفیت ارسال در مسیر رفت و عدد انتهای شاخه‌ها نشان دهندهٔ ظرفیت ارسال در مسیر برگشت است.

۲) جریان خروجی از هر گره با جریان ورودی به آن گره برابر است. بعنوان مثال در شکل زیر که بخشی از یک شبکه را نشان می‌دهد، خروجی گره b تنها می‌تواند ۴ واحد باشد چون ورودی آن ۴ است و طبیعتا خروج بیش از ۴ واحد نیز از آن امکانپذیر نمی‌باشد.



۳) حداکثر میزان جریان که در یک مسیر می‌توان ازمبدأ به مقصد فرستاد با شاخه‌ای که دارای کمترین ظرفیت ارسال در این مسیر است برابر است. بعنوان مثال حداکثر جریانی که در مسیر زیر می‌توان از a به d فرستاد ۲ واحد است زیرا شاخه‌ی b-c دارای کمترین ظرفیت به میزان ۲ است.



(فرض کنید مسیر فوق یک مسیر لوله آب است که اعداد نوشته شده بر روی آنها میزان آب قابل عبور از لوله‌ها برحسب متر مکعب بر دقیقه می‌باشد، طبیعتاً حداکثر میزان آب عبوری در یک دقیقه به میزان کمترین حجم آب قابل عبور (۲) خواهد بود.

گامهای لازم برای حل مسائل حداکثر جریان

۱ - مسیری را به دلخواه از مبدأ تا مقصد به گونه‌ای انتخاب نمائید که دارای جریان مثبت باشد (با توجه به نکته۳، حداکثر جریان در این مسیر صفر نباشد)

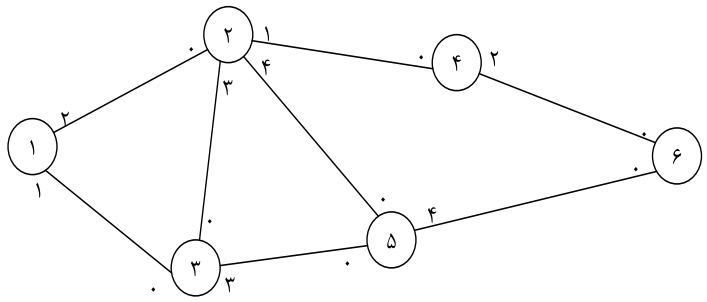
۲ - حداکثر جریان مسیر را تعیین نموده و به اندازه آن از اعداد ابتدای شاخه‌ها کسر نموده و به اعداد انتهای شاخه‌ها اضافه نمائید.
(حداکثر جریان مسیر با توجه به نکته ۳ تعیین می‌شود، در این گام ظرفیت حداقل یکی از شاخه‌های مسیر انتخابی صفر می‌گردد، بهتر است این شاخه را خط بزنید و آنرا از محاسبات بعدی کنار بگذارید تا کارتان آسانتر شود، به هر حال چون ظرفیت این مسیر صفر شده است دیگر نمی‌تواند در مسیرهای بعدی در نظر گرفته شود)
*مسیر مورد بررسی وحداکثر جریان آنرا در جدولی تحت عنوان جدول حداکثر جریان بنویسید.

۳ - گام ۱ و ۲ را آنقدر تکرار کنید که دیگر هیچ مسیری با ظرفیت مثبت (که گره مبدأ را به گره مقصد متصل کند) در شبکه موجود نباشد.

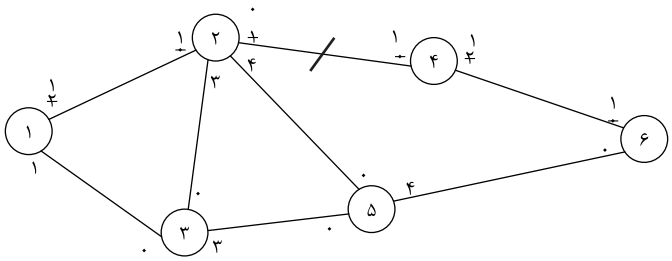
۴ - مجموع ظرفیت‌هایی که در جدول حداکثر جریان نوشته شده‌اند، حداکثر جریان شبکه را نشان می‌دهد.

*بهتر است مسیرهایی که در این روش انتخاب می‌شوند از سمت بالا به پائین جدول باشند. منظور اینست که ابتدا بالاترین مسیر ممکن، بعد مسیر پائین‌تر و همینطور به سمت پایین شبکه حرکت کنیم. این کار بیشتر برای برقرار کردن یک نظم و از قلم نیفتادن سایر مسیرها مناسب است.

مثال) شبکه‌ی زیر یک شبکه‌ی آبرسانی است که عدد نوشته شده بر روی هر شاخه بیانگر ظرفیت ارسال آب از طریق آن لوله بر حسب متر مکعب بر دقیقه می‌باشد. حداکثر میزان ارسال آب در یک دقیقه از گره ۱ به گر ه ۶ چقدر است؟



گام ۱) مسیر ۶-۴-۲-۱ را انتخاب می‌کنیم (البته مسیرهای زیادی را می‌شد انتخاب کرد که ما بصورت تصادفی این مسیر را انتخاب کردیم)



گام ۲) حداکثر جریان در این مسیر ۱ است که مربوط به شاخه ۴-۲ می‌باشد. در این مسیر عدد ۱ را از عدد سمت چپ همه شاخه‌ها کم می‌کنیم و به عدد سمت راست همه شاخه‌های این مسیر می‌افزائیم.

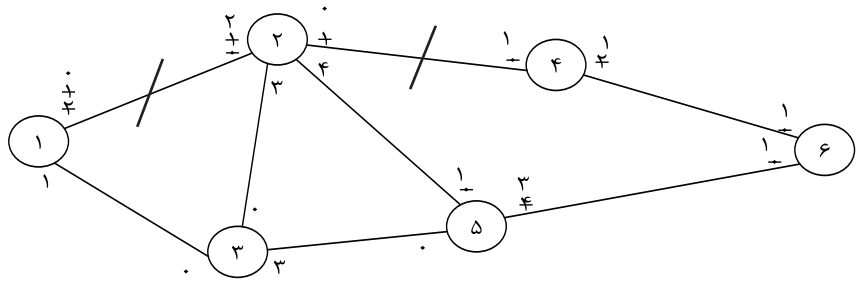
چون ظرفیت شاخه ۴-۲ صفر شد این شاخه را خط می‌زنیم. این شاخه دیگر نمی‌تواند در هیچ مسیری قرار گیرد.

* عدد سمت چپ ظرفیت ارسال است و عدد سمت راست، ظرفیت بازگشت است که چیز مهمی نیست.

گام ۳) هنوز مسیرهای دیگری وجود دارند، پس به گام ۱ می‌رویم.

تکرار گام ۱- مسیر ۶-۵-۲-۱ که یکی از مسیرهای ممکن است را انتخاب می‌کنیم.

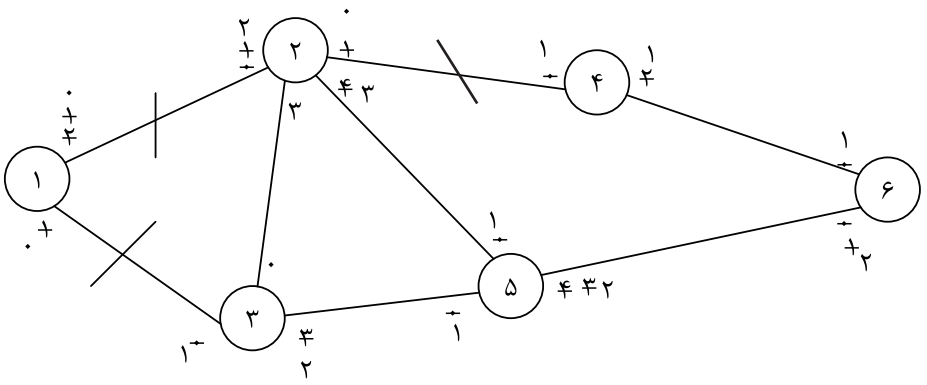
تکرار گام ۲- حداکثر جریان در این مسیر ۱ است که مربوط به شاخه (۲-۱) می‌باشد. عملیات مربوطه را انجام داده و این شاخه را خط می‌زنیم.



تکرار گام ۳- هنوز مسیرهای دیگری وجود دارند، پس به گام ۱ می‌رویم.

تکرار گام ۱- مسیر ۶-۵-۳-۱ که یکی از مسیرهای ممکن است را انتخاب می کنیم.

تکرار گام ۲- حداکثر جریان در این مسیر ۱ است که مربوط به شاخه (۳-۱) می‌باشد. عملیات مربوطه را انجام میدهیم، ظرفیت شاخه ۳-۱ هم به صفر می‌رسد، در نتیجه این شاخه را نیز خط می‌زنیم.



گام ۳- با توجه به اینکه هر دو شاخه خروجی از گره ۱ خط خورده‌اند، در نتیجه هیچ مسیر جدیدی که جریان مثبت داشته باشد قابل تعریف نیست و به انتهای حل رسیده‌ایم.

جدول زیر جدول حداکثر جریان را نشان میدهد:

مسیر	حداکثر جریان مسیر	
۱-۲-۴-۶	۱	
۱-۲-۵-۶	۱	
۱-۳-۵-۶	۱	
	۳	حداکثر جریان شبکه

در نتیجه حداکثر جریان ممکن در شبکه فوق در یک واحد زمانی (دقیقه) ، سه متر مکعب است.

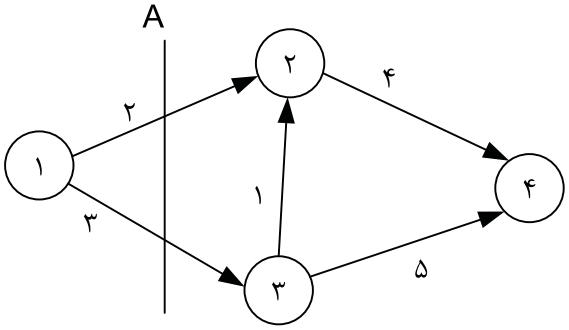
توجه: تمامی مراحل بالا روی یک شبکه انجام می پذیرد و قرار دادن مراحل بر روی شبکه‌های متعدد تنها به منظور یادگیری بوده است.

۲۸- روش برش

این روش نیز به منظور تعیین حداکثر جریان در مدلهای شبکه به کار می رود.

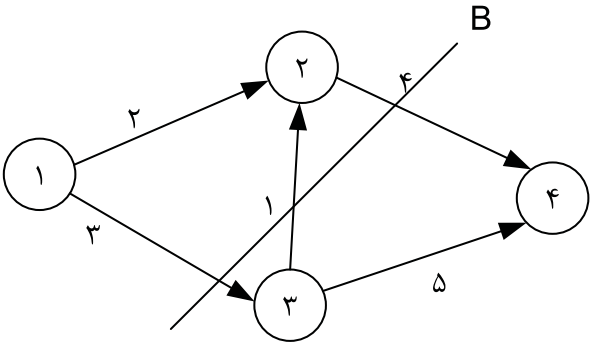
برش خطی است که بر روی شاخه های یک شبکه رسم می گردد و تمامی گره های شبکه را به دو گروه مبدأ (که گره مبدأ در آن سمت قرار دارد) و گروه مقصد (که گره مقصد سمت آنها قرار دارد) تقسیم می کند.

ظرفیت هر برش برابر با مجموع ظرفیت شاخه هایی است که از سمت گره های گروه مبدأ برش به سمت گره های گروه مقصد برش حرکت کرده اند و برش از روی آنها عبور کرده است.



مثال) ظرفیت برش A در شبکه زیر چقدر است؟

این برش از روی دو شاخه عبور کرده که از سمت گروه مبدأ (گره ۱) به سمت گروه مقصد (گره های ۲،۳،۴) در حرکتند، در نتیجه ظرفیت برش از مجموع ظرفیت های هر دو شاخه بدست می آید (۵=۳+۲)

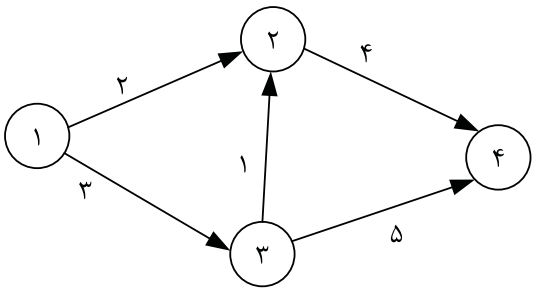


ظرفیت برش B در شبکه زیر چقدر است؟

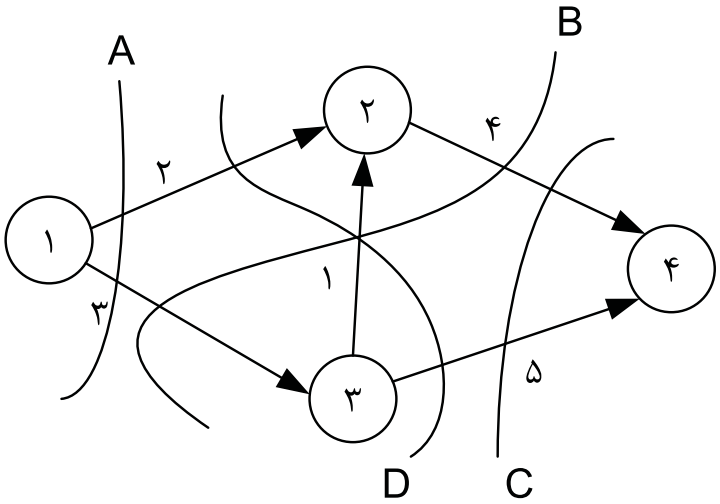
این برش از روی سه شاخه عبور کرده است که دو شاخه از سمت گروه مبدأ (گره های ۲و۱) به سمت گروه مقصد (گره های ۴و۳) در حرکتند و شاخه (۲-۳) از سمت گروه مقصد به سمت گروه مبدأ حرکت کرده است. در نتیجه ظرفیت برش از جمع ظرفیت های دو شاخه (۴-۲) و (۳-۱) بدست می آید که برابر است با ۷=۳+۴

قضیه حداکثر جریان، حداقل برش: هنگامی که تمام برش های ممکن در یک شبکه را رسم کنیم، حداکثر جریان در آن شبکه معادل با ظرفیت برشی است که در میان همه برشهای آن شبکه، حداقل ظرفیت را دارد.

مثال) حداکثر جریان در شبکه زیر چقدر است؟



حل: تمامی برشهای ممکن در این شبکه را رسم می کنیم و برای هر یک از آنها ظرفیت را تعیین می کنیم، ظرفیت حداقل برش برابر با حداکثر جریان است.



برش	گروه مبدأ	گروه مقصد	ظرفیت برش
A	۱	۲،۳،۴	۵
B	۲،۱	۳،۴	۷
C	۱،۲،۳	۴	۹
D	۱،۳	۴،۵	۸

در نتیجه حداکثر جریان در این شبکه معادل با ۵ است.

۲۹- مسأله حداقل درخت دربرگیرنده

روش غیر جدولی برای مسائل حداقل درخت در برگیرنده

قبل از ارائه گامهای این روش به دو تعریف قراردادی می پردازیم (این تعریف ها برای درک بهتر روش در این منبع ارائه شده و نیازی به حفظ کردن آنها ندارید، فقط روش را به خوبی یاد بگیرید)

گره های مرتبط : گره هایی که از طریق شاخه به هم ارتباط دارند گره های مرتبط نامیده می شوند.

گره های مجاور: گره هایی که بصورت مستقیم و تنها از طریق یک شاخه به هم مرتبط هستند، گره های مجاور نامیده می شوند.

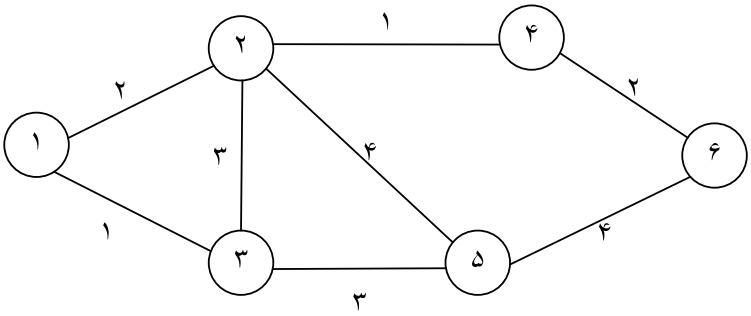
گره های متصل و غیر متصل: در ابتدای حل همه گره ها غیر متصل هستند. هنگامی که در فرایند حل، یک شاخه را پررنگ می کنیم و آن شاخه جزئی از درخت ما می شود، به آن گره ها متصل گوئیم. در انتهای حل همه ی گره ها متصل خواهند شد.

گامهای روش غیر جدولی

گام ۱) یک گره را به دلخواه انتخاب کنید و به نزدیکترین گره غیر متصل مجاور (گرهی که به گره اول ما مرتبط است و شاخه ی مرتبط کننده درمیان شاخه هایی که به گره اول ما وصل هستند دارای کمترین ظرفیت است) وصل کنید.

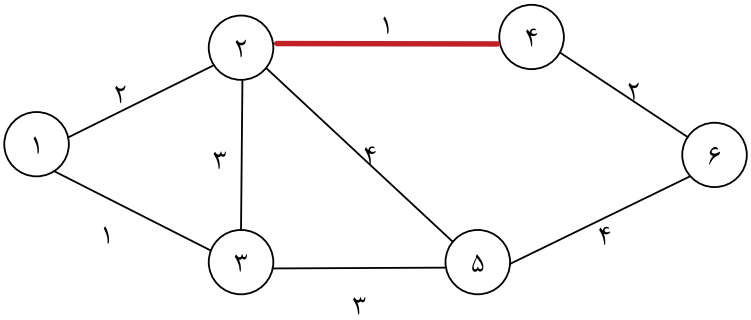
گام ۲) گره غیر متصل و مجاور مرتبط که نزدیکترین فاصله به گره های متصل شده قبلی دارد را انتخاب و به آن وصل کنید. این کار را آنقدر ادامه دهید تا تمامی گره ها بهم وصل شوند.

مثال) شبکه زیر شکل ۶ روستا را نشان می دهد که می خواهند از طریق کابل های مخابراتی به هم متصل باشند. کشیدن کابل بین روستاها فقط از طریق مسیرهای زیر (شاخه ها) امکانپذیر است و طول هر مسیر هم داده شده. برای اینکه هر شش روستا به هم متصل باشند و کمترین میزان کابل مصرف شود بهتر است روستاها از طریق کدام مسیرها به هم متصل شوند؟



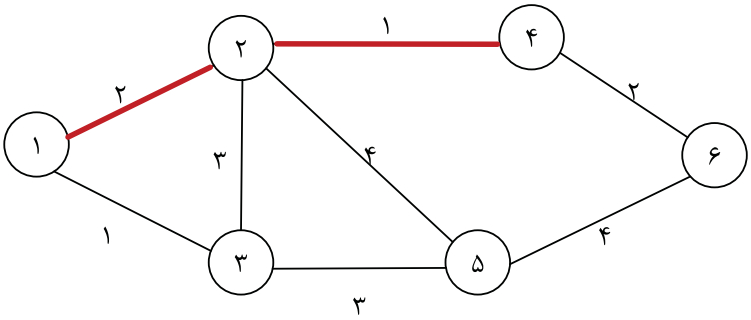
پاسخ: این یک مسأله حداقل درخت در برگیرنده است چون می خواهیم همه گره ها (روستاها) به هم متصل شوند و مجموع شاخه ها(مسیر یا سیم) حداقل باشد.

یک گره به دلخواه انتخاب می شود، مثلاً گره ۴ (اینکه کدام گره انتخاب شود تأثیری بر جواب ندارد)، این گره به گره های۲،۶ مرتبط است، اما شاخه ای که آنرا به گره ۲ مرتبط کرده است عدد کوچکتری دارد، در نتیجه گره ۴ را به گره ۲ متصل می کنیم.



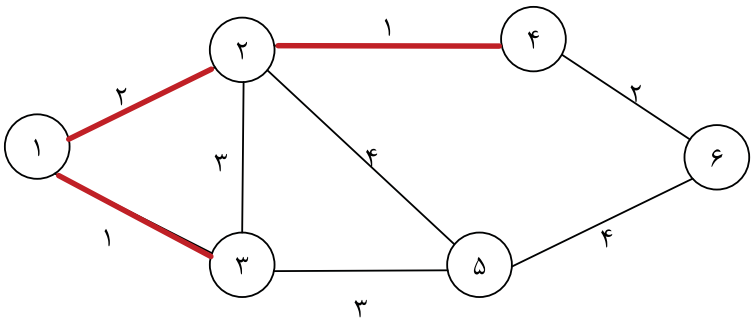
هم اکنون این دو گره متصل هستند، تمامی گره های مرتبط با این دو گره را در نظر می گیریم و از میان آنها گرهی را به آنها متصل می کنیم که با کوچکترین عدد شاخه مرتبط کننده با دو گره متصل قبلی در ارتباط است.

گره های ۱،۳،۵ از طریق شاخه هایی با اعداد (فاصله) ۲،۳،۴ با گره شماره ۲ مرتبط است و گره شماره ۶ با شاخه ای با عدد ۲ با گره ۴ در ارتباط است . با توجه به اینکه در میان این اعداد، عدد ۲ از همه کوچکتر است. یا گره ۱ را به ۲ و یا گره ۶را به ۴ متصل می کنیم.

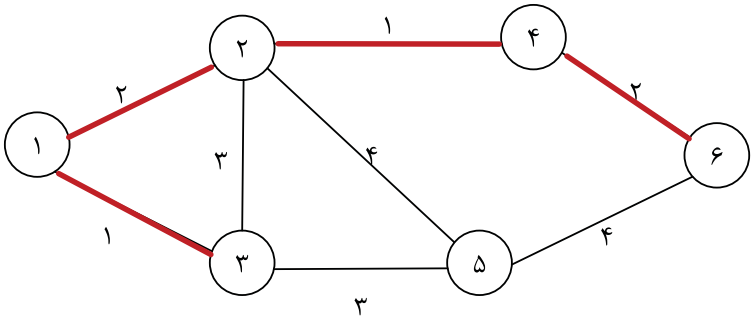


این روند به شکل زیر ادامه می یابد تا جایی که تمامی گره ها به هم متصل باشند.

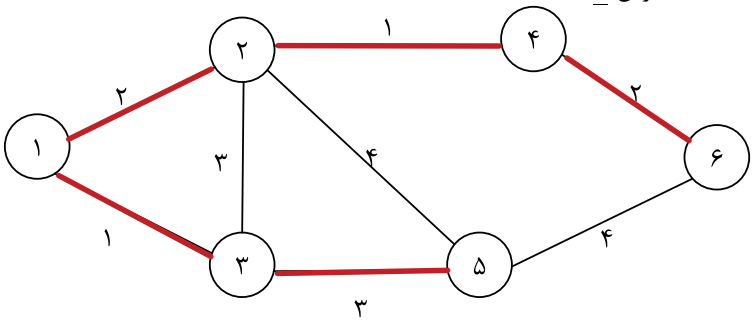
مقایسه بین شاخه های (۶-۴) ، (۲،۵) ، (۳-۲)، (۳-۱)، با ظرفیت ۱،۳،۴،۲ ، کمترین ۱ است.



مقایسه بین شاخه های (۶-۴) ، (۵-۲)، (۵-۳) با ظرفیت ۳،۴،۲ ، کمترین ۲ است.

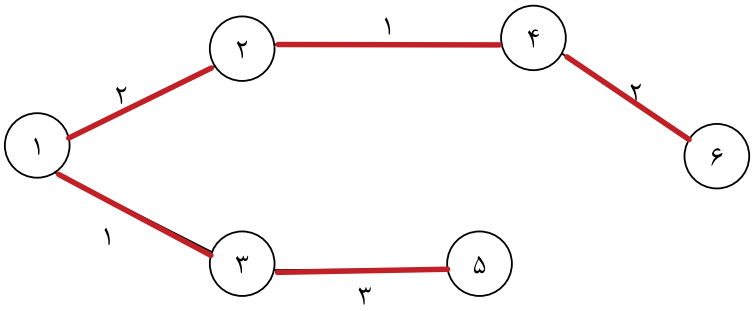


مقایسه بین شاخه های (۵-۶) ، (۵-۲)، (۵-۳) با ظرفیت ۳،۴،۴ ، کمترین ۳ است.



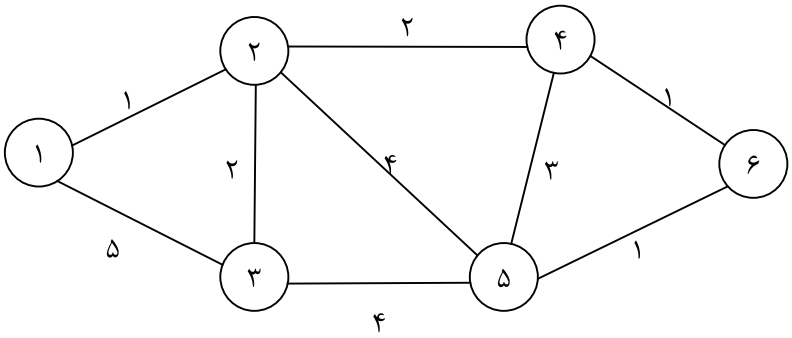
تمامی گره ها به هم متصل شده اند، این شش روستا را می توان حداقل با ۹=۲+۱+۲+۱+۳ واحد سیم به هم وصل کرد.

یعنی درخت این شکل بصورت زیر است :

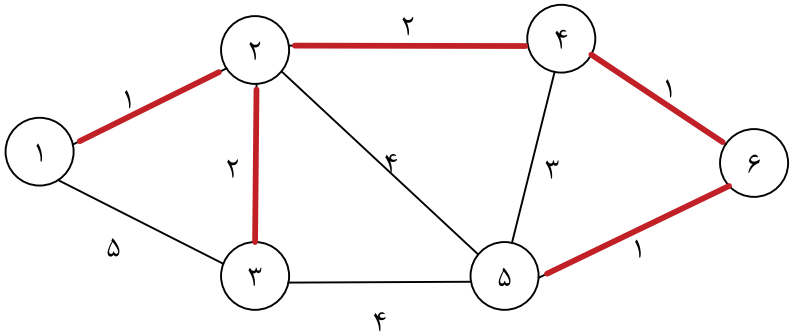


تمرین:

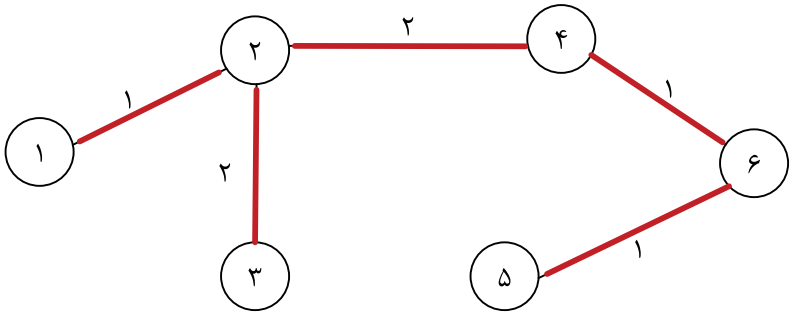
حداقل درخت در برگیرنده برای شبکه زیر کدامست و مجموع شاخه های آن چند است؟



پاسخ:



۱+۲+۲+۱+۱=۷



۳۰- الگوریتم انشعاب و تحدید

گامهای الگوریتم انشعاب و تحدید

گام ۱) مسأله را بدون توجه به شرط عدد صحیح بودن متغیرها حل کنید. در صورتی که جوابهای مسأله عدد صحیح باشند مسأله حل شده است و در غیر اینصورت به گام ۲ بروید.

گام ۲) در صورتی که تابع هدف Max است، برای $z_L, -\infty$ و اگر Min است، مقدار $+\infty$ را در نظر بگیرید. (این مقدار بعنوان حد پائین تابع هدف در نظر گرفته می شود که در حین فرایند حل بهبود می یابد)

گام ۳)انشعاب: یکی از متغیرهای تصمیمی که دارای مقدار عدد صحیح نیست را انتخاب کرده و دو محدودیت جدید به شرح زیر بنویسید:

الف) از مقدار متغیر تصمیم انتخاب شده برای انشعاب، آنقدر کم کنید تا به بزرگترین عدد صحیحی که کوچکتر از مقدار فعلی این متغیر است برسد. این مقدار عدد صحیح را L بنامید و محدودیت زیر را بنویسید:

$Xj \le Lj$

ب) محدودیت دوم عبارتست از: $Xj \ge Lj + ۱$

حال دو مدل می نویسیم: برای دور اول حل این دو مدل همان مدل اصلی مسأله هستند، با این تفاوت که به یکی از آنها محدودیت الف و به دیگری محدودیت ب اضافه شده است.

برای دورهای بعدی این دو مدل، همان مدل خروجی از گام ششم هستند(مدل اصلی با محدودیت هایی که بدان اضافه شده) با این تفاوت که محدودیت های الف به یکی و ب به دیگری اضافه می گردند.

گام ۴) تحدید: مسائل گام ۳ را حل کنید و بهترین مقداری را که به ازاء جواب های موجه دو مسأله این انشعاب برای تابع هدف بدست می آید را انتخاب کرده و بعنوان z_L جدید جایگزین کنید (توجه کنید که z ای که جایگزین مقدار z_L می شود ، حتماً باید مربوط به یک جواب موجه باشد، یعنی شرایط عدد صحیح بودن در آن جواب وجود داشته باشد.)

گام ۵) به عمق رسیدن- هر انشعاب در صورتی که یکی از سه شرط زیر را داشته باشد، به اتمام رسیده و یا اصطلاحاً به عمق می رسد:

الف) مقدار تمامی متغیرهای تصمیم عدد صحیح باشد.

ب) مسأله فرعی ناشی از انشعاب دارای منطقه موجه نباشد.

ج) مقدار z بدست آمده در این انشعاب بدتر از z_L باشد.

گام ۶) در صورتی که تمامی انشعاب ها به عمق رسیدند توقف کنید و مسأله ای را که مقدار تابع هدفش مساوی z_L است را انتخاب نمائید. جواب این مسأله ، جواب بهینه است. در غیر اینصورت به گام ۳ بروید.

مثال) جواب بهینه را با استفاده از الگوریتم انشعاب و تحدید (از نوع ترسیمی) بدست آورید؟

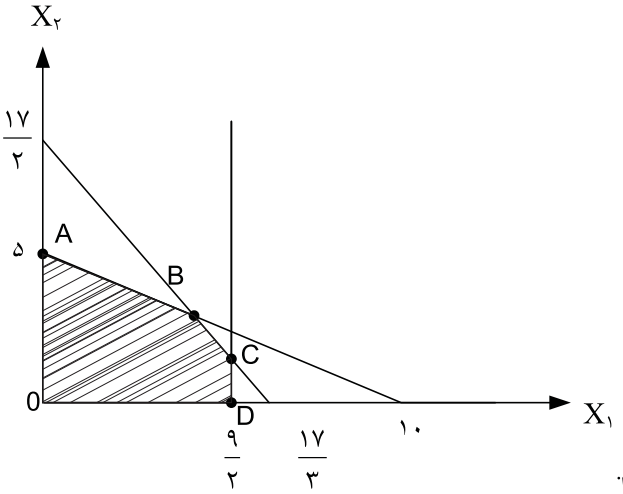
$$\text{Max } Z = ۴x_۱ + ۳x_۲$$

$$st: \begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ \le ۱۰ \\ ۳x_۱ + ۲x_۲ \le ۱۷ \\ ۲x_۱ \le ۹ \end{cases}$$

$$x_۱, x_۲ \ge ۰ \ , \quad \text{int}$$

گام ۱) مسأله را بدون توجه به شرط عدد صحیح بودن متغیرها حل می کنیم. (این مدل را $P_۰$ می نامیم)

با رسم کردن و حرکت دادن تابع هدف، یا با قرار دادن مختصات نقاط O,A,B,C,D ، نقطه ی بهینه را بدست می آوریم:



$$O\ (۰,۰) \longrightarrow Z(۰,۰) = ۰$$
$$A\ (۰,۵) \longrightarrow Z(۰,۵) = ۱۵$$
$$B\left(\frac{۷}{۲},\frac{۱۳}{۴}\right) \longrightarrow Z^*\left(\frac{۷}{۲},\frac{۱۳}{۴}\right) = \frac{۹۵}{۴}$$
$$C\left(\frac{۹}{۲},\frac{۷}{۴}\right) \longrightarrow Z\left(\frac{۹}{۲},\frac{۷}{۴}\right) = \frac{۹۳}{۴}$$
$$D\left(\frac{۹}{۲},۰\right) \longrightarrow Z\left(\frac{۹}{۲},۰\right)$$

با توجه به اینکه جوبهای مسأله عدد صحیح نیستند، به گام ۲ می رویم

گام ۲) برای مقدار تابع هدف ، حد پائین $z_L = -\infty$ را در نظر می گیریم.

گام ۳) برای جواب بهینه غیر عدد صحیح بدست آمده یک انشعاب بر روی یکی از متغیرها انجام می دهیم. مثلاً متغیر $x_۱$ را منشعب می کنیم محدودیت الف بصورت مقابل خواهد بود:

$$B\left(\frac{۷}{۲},\frac{۱۳}{۴}\right) \to x_۱ = \frac{۷}{۲} \to x_۱ = ۳\frac{۱}{۲} \to x_۱ \le ۳$$

و محدودیت ب عبارتست از :

$$Xj \ge Lj + ۱ \to x_۱ \ge ۴$$

* بهتر است انشعاب را برای متغیری انجام دهیم که بخش غیرصحیح (اعشاری) آن بزرگتر باشد.

هم اکنون در دور اول هستیم، پس مدلهایی که تعریف می کنیم از مدل اصلی و محدودیت های الف و ب ساخته می شوند، آن مدلها را مدل $P_۱$ و $P_۲$ می نامیم و هر دو را حل می کنیم:

$P_۱$:

$$\text{Max } Z = ۴x_۱ + ۳x_۲$$

$$st: \begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ \le ۱۰ \\ ۳x_۱ + ۲x_۲ \le ۱۷ \\ ۲x_۱ \le ۹ \\ x_۱ \le ۳ \end{cases}$$

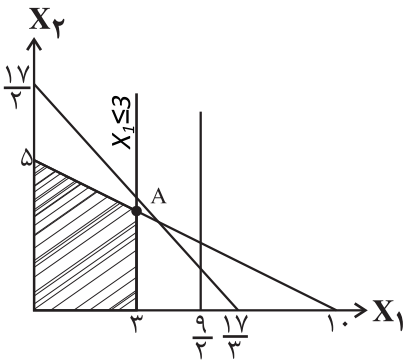
$$x_۱, x_۲ \ge ۰ \ , \text{int}$$

$P_۲$:

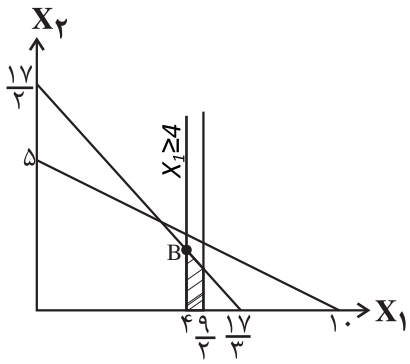
$$\text{Max } Z = ۴x_۱ + ۳x_۲$$

$$st: \begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ \le ۱۰ \\ ۳x_۱ + ۲x_۲ \le ۱۷ \\ ۲x_۱ \le ۹ \\ x_۱ \ge ۴ \end{cases}$$

$$x_۱, x_۲ \ge ۰ \ , \text{int}$$



$A(3,\frac{7}{2}) \rightarrow Z_A^* = \frac{45}{2}$



$B(4,\frac{5}{2}) \rightarrow Z_B^* = \frac{94}{4}$

* در مدلهای بالا، همه ی نقاط چک شده و نقطه ی بهینه به دست آمده.

* در مدلهای فوق نیز جواب بهینه بدون توجه به شرط عدد صحیح بودن مورد محاسبه قرار می گیرد.

جواب را بصورت نمودار درختی نشان می دهیم:

$z_L = -\infty$

$P_۰$ $\quad Z = ۲۳/۷۵$

$x_۱ = \frac{۷}{۲} \quad , \quad x_۲ = \frac{۱۳}{۴}$

$x_۱ \le ۳$

$P_۱$: $\quad Z = ۲۲/۵$

$x_۱ = ۳ \quad , \quad x_۲ = \frac{۷}{۲}$

$x_۱ \ge ۴$

$P_۲$: $\quad Z = ۲۳/۵$

$x_۱ = ۴ \quad , \quad x_۲ = \frac{۵}{۲}$

گام ۴) با توجه به اینکه هیچ کدام از انشعاب ها دارای مقدار موجهی نشدند (در هیچیک از آنها $x_۲$، $x_۱$ دارای مقداری عدد صحیح نیستند)، مقدار z_L بهبود نمی یابد.

گام ۵) به عمق رسیدن را برای دو مدل $P_۱$ ، $P_۲$ بررسی می کنیم

برای $P_۱$:

- مقدار متغیرهای تصمیم عدد صحیحند؟ خیر
- این مسأله فرعی دارای منطقه موجه نیست ؟ خیر
- مقدار بدست آمده در این انشعاب بدتر از z_L یعنی $(-\infty)$است؟ خیر

پس این انشعاب به عمق نرسیده است.

برای $P_۲$:

با بررسی سه مورد بالا برای$P_۲$ به این نتیجه می رسیم که $P_۲$ هم به عمق نرسیده است.

گام ۶) به گام ۳ می رویم و انشعاب متغیر غیر عدد صحیح را برای هر دو مسأله ی $P_۱$ و$P_۲$ انجام می دهیم.

گام ۳-برای مسأله $P_۱$ متغیر $x_۲$ بصورت زیر انشعاب می یابد و دو مدل $P_۴$ و $P_۳$ تعریف می شوند:

$$x_۲ = \frac{۷}{۲} = ۳\frac{۱}{۲} \rightarrow \begin{cases} x_۲ \le ۳ \\ x_۲ \ge ۴ \end{cases}$$

$P_۳$:

$$\text{Max } Z = ۴x_۱ + ۳x_۲$$

$$\text{st}: \begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ \le ۱۰ \\ ۳x_۱ + ۲x_۲ \le ۱۷ \\ ۲x_۱ \le ۹ \\ x_۱ \le ۳ \\ x_۲ \le ۳ \end{cases}$$

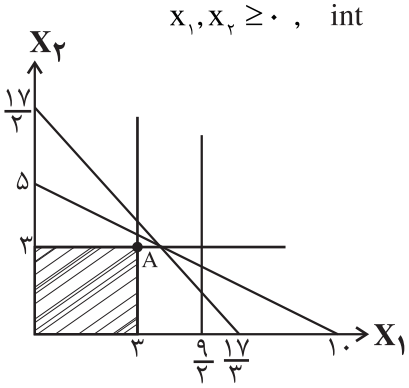
$$x_۱, x_۲ \ge ۰ \ , \ \text{int}$$

$P_۴$:

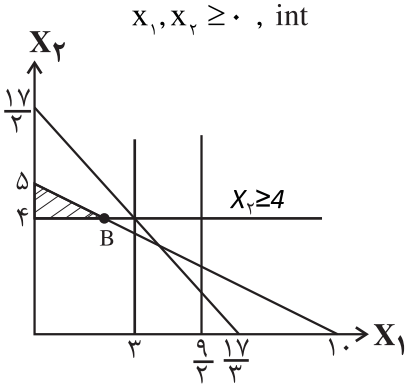
$$\text{Max } Z = ۴x_۱ + ۳x_۲$$

$$\text{st}: \begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ \le ۱۰ \\ ۳x_۱ + ۲x_۲ \le ۱۷ \\ ۲x_۱ \le ۹ \\ x_۱ \le ۳ \\ x_۲ \ge ۴ \end{cases}$$

$$x_۱, x_۲ \ge ۰ \ , \ \text{int}$$



$A(3,3)$, $Z_A^* = ۲۱$



$B(4,2)$ $Z_B^* = ۲۰$

برای مسأله ی $P_۲$ متغیر $x_۲$ بصورت زیر انشعاب می یابد و دو مدل $P_۶$ و $P_۵$ تعریف می شوند:

$$x_۲ = \frac{۵}{۲} \rightarrow x_۲ = ۲\frac{۱}{۲} \quad \rightarrow \begin{cases} x_۲ \le ۲ \\ x_۲ \ge ۳ \end{cases}$$

$$P_۵ : \text{Max } Z = ۴x_۱ + ۳x_۲$$

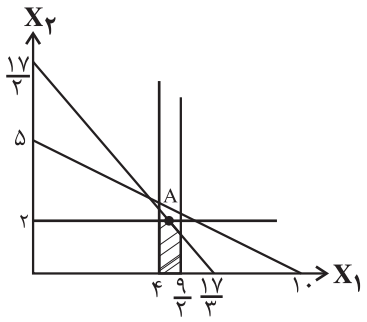
$$st : \begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ \le ۱۰ \\ ۳x_۱ + ۲x_۲ \le ۱۷ \\ ۲x_۱ \le ۹ \\ x_۱ \ge ۴ \\ x_۲ \le ۲ \end{cases}$$

$$x_۱, x_۲ \ge ۰ \ , \text{int}$$

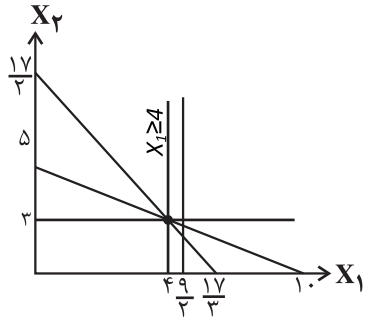
$$P_۶ : \text{Max } Z = ۴x_۱ + ۳x_۲$$

$$st : \begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ \le ۱۰ \\ ۳x_۱ + ۲x_۲ \le ۱۷ \\ ۲x_۱ \le ۹ \\ x_۱ \ge ۴ \\ x_۲ \ge ۳ \end{cases}$$

$$x_۱, x_۲ \ge ۰ \ , \text{int}$$

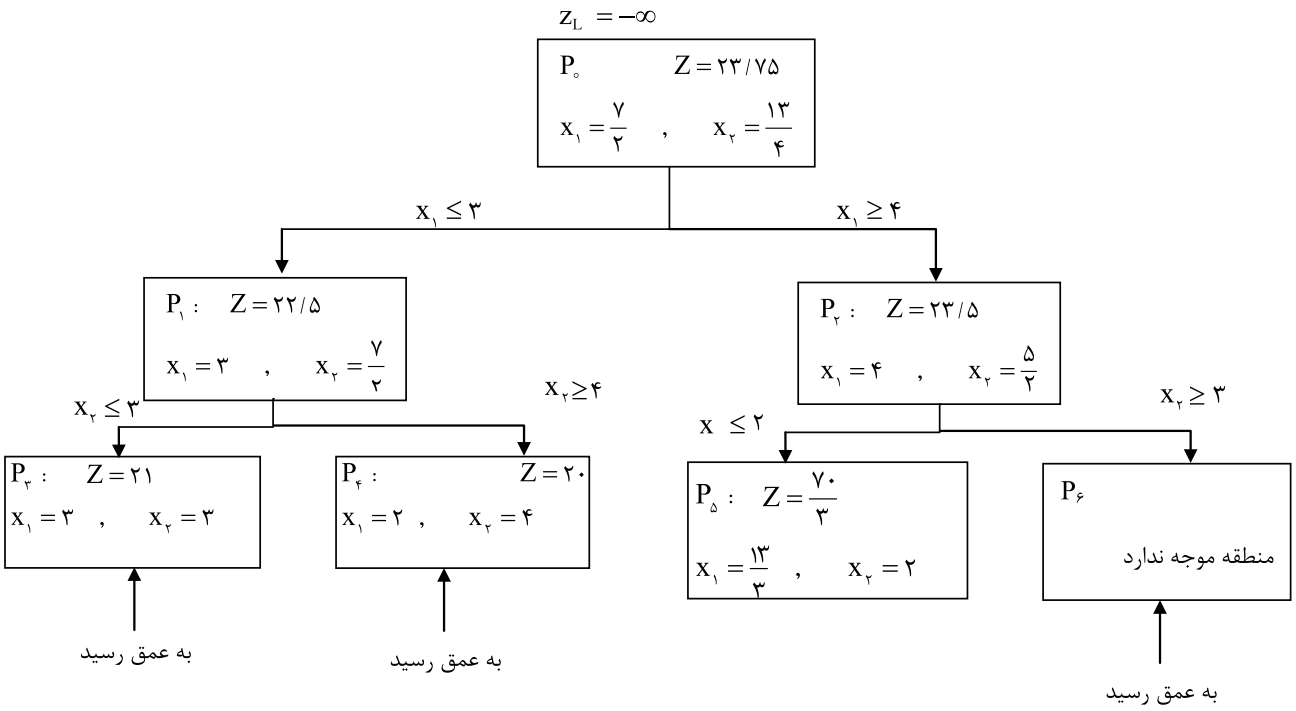


$A(\frac{۱۳}{۳},۲) \quad Z_A^* = \frac{۷۰}{۳}$



عدم وجود منطقه ی موجه

جواب های بدست آمده تا این قسمت را بصورت نمودار درختی نشان میدهیم:



گام ۴) مقدار Z مربوط به مسأله ی $P_۳$ هم مربوط به یک جواب موجه است و هم از سایر جوابهای موجه بهتر می باشد از اینرو به جای z_L که $-\infty$ بود جایگزین می گردد، یعنی در بخش بالایی نمودار درختی، تغییر زیر را اعمال می کنیم:

$$Z_L = \cancel{-\infty} \longrightarrow ۲۱$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} P_۰ & Z = ۲۳/۷۵ \\ x_۱ = \frac{۷}{۲} \quad , & x_۲ = \frac{۱۳}{۴} \end{array}}$$

گام ۵) انشعاب ها را از نظربه عمق رسیدن بررسی می کنیم:

$P_۳$ به عمق رسیده است چون تمامی متغیرهای تصمیم دارای مقدار عدد صحیح هستند.

$P_۴$ هم به عمق رسیده است چون تمامی متغیرهای تصمیم دارای مقدار عدد صحیح هستند.

$P_۵$ به عمق نرسیده

$P_۶$ به عمق رسیده است چون منطقه موجه ندارد.

گام ۶) انشعاب $P_۵$ هنوز به عمق نرسیده، پس به گام سوم می رویم.

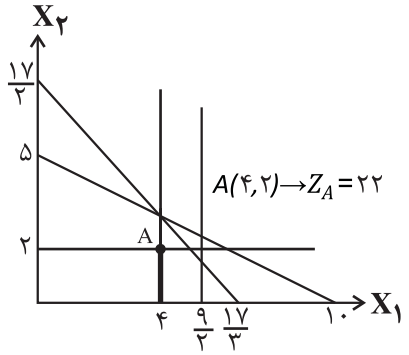
گام ۳- متغیر تصمیم $x_۱$ را انشعاب داده و دو محدودیت و دو مدل بصورت زیر تعریف می شوند:

$$x_۱ = \frac{۱۳}{۳} \longrightarrow x_۱ = ۴\frac{۱}{۳} \longrightarrow \begin{cases} x_۱ \le ۴ \\ x_۱ \ge ۵ \end{cases}$$

$$P_۷ : \text{Max } Z = ۴x_۱ + ۳x_۲$$

$$st : \begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ \le ۱۰ \\ ۳x_۱ + ۲x_۲ \le ۱۷ \\ ۲x_۱ \le ۹ \\ x_۱ \ge ۴ \\ x_۲ \le ۲ \\ x_۱ \le ۴ \end{cases}$$

$$x_۱, x_۲ \ge ۰ \ , \quad \text{int}$$

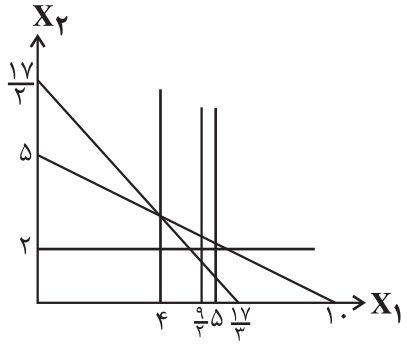


منطقه موجه یک خط است

$$P_۸ : \text{Max } Z = ۴x_۱ + ۳x_۲$$

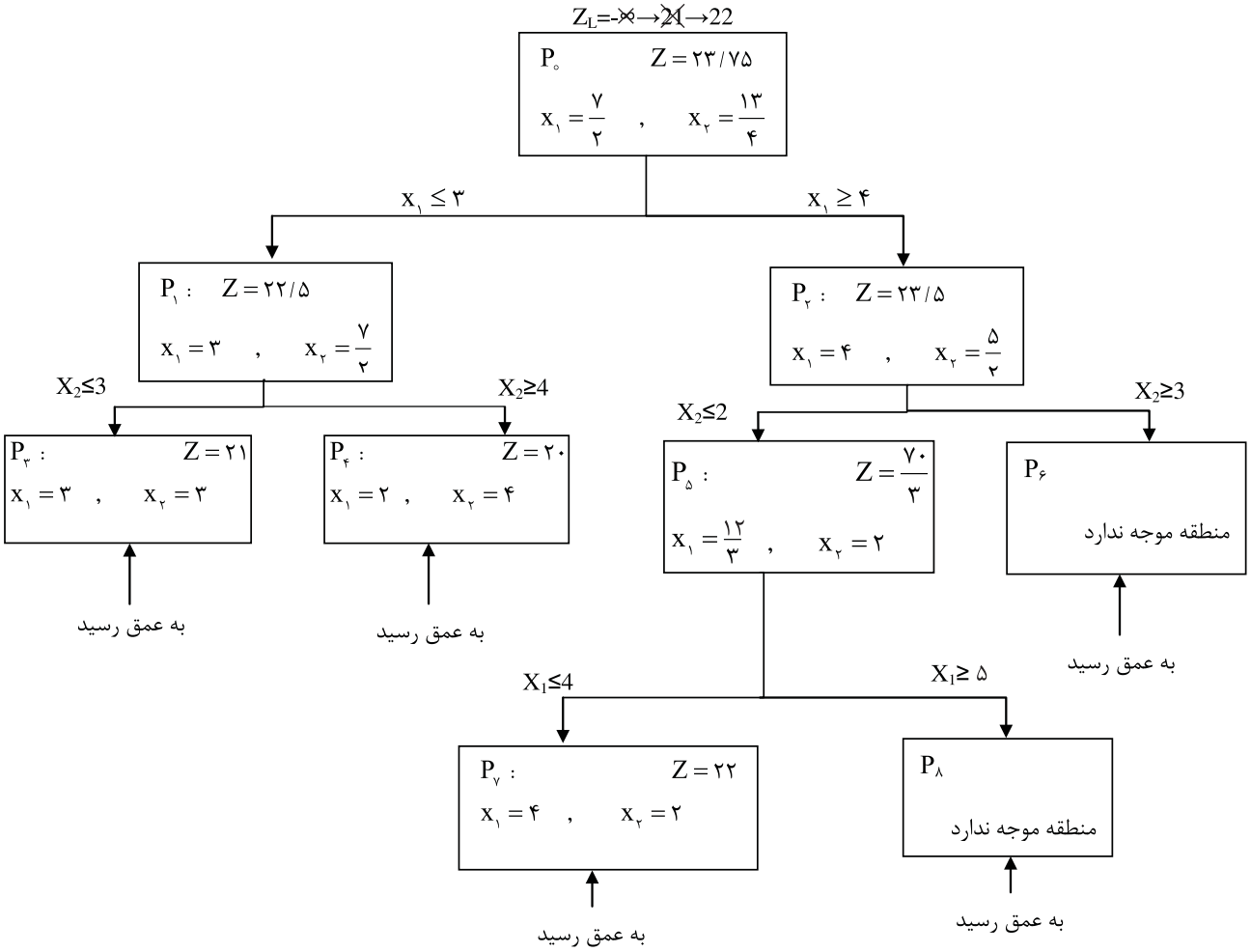
$$st : \begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ \le ۱۰ \\ ۳x_۱ + ۲x_۲ \le ۱۷ \\ ۲x_۱ \le ۹ \\ x_۱ \ge ۴ \\ x_۲ \le ۲ \\ x_۱ \ge ۵ \end{cases}$$

$$x_۱, x_۲ \ge ۰ \ , \ \text{int}$$



منطقه موجه وجود ندارد

گام ۴) جواب مدل $P_۷$ یک جواب موجه است و مقدار ۲۲ از مقدار z_L موجود که ۲۱ است بهتر است، پس مقدار ۲۱ بهبود می یابد و نمودار درختی بصورت زیر می شود:



گام ۵) $P_۷$ به خاطر رسیدن به جواب موجه و$P_۸$ به خاطر نداشتن منطقه موجه به عمق رسیدند .

گام ۶) تمامی انشعاب ها به عمق رسیدند و جواب بهینه بصورت زیر است

$$x_۱ = ۴ \quad , x_۲ = ۲ \quad , \quad z^* = ۲۲$$

۳۱-الگوریتم برش اولیه تماماً عدد صحیح

مدل زیر را با استفاده از الگوریتم برش اولیه ی تماماً عدد صحیح حل کنید؟

$$\text{Max } Z = ۴x_۱ + ۳x_۲$$

$$\begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ \le ۱۰ \\ ۳x_۱ + ۲x_۲ \le ۱۷ \\ ۲x_۱ \le ۹ \end{cases}$$

$$x_۱, x_۲ \ge ۰ \quad , \text{int}$$

	$X_۱$	$X_۲$	$S_۱$	$S_۲$	$S_۳$	
Z	-۴	-۳	۰	۰	۰	۰
$S_۱$	۱	۲	۱	۰	۰	۱۰
$S_۲$	۳	۲	۰	۱	۰	۱۷
$S_۳$	۲	۰	۰	۰	۱	۹

گام ۱) در جدول ابتدائی تمامی اعداد صحیح هستند.

گام۲) جدول فعلی بهینه نیست.

گام ۳) متغیر $x_۲$ در این جدول ورودی است (x_k) و سطر سوم خروجی است (سطر r) ، از اینرو $a_{rk}=۲$ است و معادله ی برشی را بصورت زیر می نویسیم:

$$\sum \left[\frac{a_{rj}}{a_{rk}}\right] x + S = \left[\frac{b_r}{a_{rk}}\right] \Longrightarrow \left[\frac{۲}{۲}\right] x_۱ + \left[\frac{۱}{۲}\right] s_۳ + s_۴ = \left[\frac{۹}{۲}\right] \Longrightarrow x_۱ + s_۴ = ۴$$

این معادله را به جدول اضافه کرده و آنرا یک مرحله حل می کنیم:

	$X_۱$	$X_۲$	$S_۱$	$S_۲$	$S_۳$	$S_۴$	
Z	-۴	-۳	۰	۰	۰	۰	۰
$S_۱$	۱	۲	۱	۰	۰	۰	۱۰
$S_۲$	۳	۲	۰	۱	۰	۰	۱۷
$S_۳$	۲	۰	۰	۰	۱	۰	۹
$Sg_۱$	①	۰	۰	۰	۰	۱	۴
Z	۰	-۳	۰	۰	۰	۴	۱۶
$S_۱$	۰	۲	۱	۰	۰	-۱	۶
$S_۲$	۰	۲	۰	۱	۰	-۳	۵
$S_۳$	۰	۰	۰	۰	۱	-۲	۱
$x_۱$	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۴

در این جدول $x_۲$ ورودی و $S_۲$ خروجی است همانطور که مشاهده می گردد عدد لولا غیر یک است، از اینرو معادله ی برشی را برای سطر مربوط به $S_۲$ می نویسیم $(a_{rk}=۲)$:

$$\left[\frac{۲}{۲}\right] x_۱ + \left[\frac{۱}{۲}\right] s_۲ + \left[\frac{-۳}{۲}\right] s_۴ + s_۵ = \left[\frac{۵}{۲}\right]$$

برش را وارد جدول کرده و یک مرحله حل می کنیم:

	$X_۱$	$X_۲$	$S_۱$	$S_۲$	$S_۳$	$Sg_۱$	$Sg_۲$	
Z	۰	-۳	۰	۰	۰	۴	۰	۱۶
$S_۱$	۰	۲	۱	۰	۰	-۱	۰	۶
$S_۲$	۰	۲	۰	۱	۰	-۳	۰	۵
$S_۳$	۰	۰	۰	۰	۱	-۲	۰	۱
$x_۱$	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۴
$Sg_۲$	۰	①	۰	۰	۰	-۲	۱	۲
Z	۰	۰	۰	۰	۰	-۲	۳	۲۲
$S_۱$	۰	۰	۱	۰	۰	۳	-۲	۲
$S_۲$	۰	۰	۰	۱	۰	۱	-۲	۱
$S_۳$	۰	۰	۰	۰	۱	-۲	۰	۱
$x_۱$	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۴
$x_۲$	۰	۱	۰	۰	۰	-۲	۱	۲

با توجه به اینکه جدول بهینه نیست وa_{rk}=۳ است. معادله ی جدید برش را نوشته و ادامه می دهیم :

$$\left[\frac{۱}{۳}\right]s_۱ + \left[\frac{۳}{۳}\right]sg_۱ + \left[\frac{-۲}{۳}\right]sg_۲ + sg_۳ = \left[\frac{۲}{۳}\right]$$

$$\Rightarrow sg_۱ - sg_۲ + sg_۳ = ۰$$

	$X_۱$	$X_۲$	$S_۱$	$S_۲$	$S_۳$	$Sg_۱$	$Sg_۲$	$Sg_۳$	
Z	۰	۰	۰	۰	۰	-۲	۳	۰	۲۲
$S_۱$	۰	۰	۱	۰	۰	۳	-۲	۰	۲
$S_۲$	۰	۰	۰	۱	۰	۱	-۲	۰	۱
$S_۳$	۰	۰	۰	۰	۱	-۲	۰	۰	۱
$x_۱$	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۴
$x_۲$	۰	۱	۰	۰	۰	-۲	۱	۰	۲
$Sg_۳$	۰	۰	۰	۰	۰	①	-۱	۱	۰
Z	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۲	۲۲
$S_۱$	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۱	-۳	۲
$S_۲$	۰	۰	۰	۱	۰	۰	-۱	-۱	۱
$S_۳$	۰	۰	۰	۰	۱	۰	-۲	۲	۱
$x_۱$	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۲	-۱	۴
$x_۲$	۰	۱	۰	۰	۰	۰	-۱	۲	۲
$sg_۱$	۰	۰	۰	۰	۰	۱	-۱	۱	۰
	جواب بهینه است $x_۱^* = ۴ , x_۲^* = ۲ , z^* = ۲۲$								

۳۲ – الگوریتم صفحات برشی برای مسائل برنامه ریزی عدد صحیح مختلط

گام ۱) مدل را آماده کرده (مقادیر کسری در مدل نباشد) و بدون در نظر گرفتن شرط عدد صحیح بودن متغیرها آنرا توسط روش سیمپلکس حل می کنیم.

گام ۲) اگر همه ی مقادیری که دارای شرط عدد صحیح بودن هستند، دارای مقدار صحیح بودند توقف کرده و در غیر اینصورت به گام ۳ می رویم.

گام ۳) سطری(متغیری) که دارای شرط عدد صحیح بوده اما عدد صحیح نمی باشد و جزء کسری آن از سایر متغیرها بزرگتر است را انتخاب کرده و معادله ی برش را با استفاده از رابطه ی زیر برای آن سطر می نویسیم:

$$sg_i - \left\{ \sum \overset{+}{aij}\ wj + \left(\frac{[bi]_F}{[bi]_{F-1}} \right) \sum \overset{-}{aij}\ wj \right\} = -[bi]_F$$

گام ۴) محدودیت برش را به جدول اضافه کرده و حل را با روش سیمپلکس ثانویه ادامه میدهیم و به گام ۲ می رویم.

* $\overset{+}{aij}$ ،ضرایبی هستند که علامت آنها مثبت است و $\overset{-}{aij}$ دارای علامت منفی هستند.

مثال) یک مدل و جدول نهایی آن، بدون شرط در نظر گرفتن عدد صحیح بودن متغیر x_1 داده شده . جواب مدل را با در نظر گرفتن شرط مربوط به مدل ، با استفاده از الگوریتم صفحات برشی مختلط بدست آورید؟

$$\text{Max } Z = 7x_1 + 9x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \le 6 \\ 7x_1 + x_2 \le 35 \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0$ $\quad$ x_1 عدد صحیح

	X_1	X_2	S_1	S_2	R.H.S
Z	۰	۰	$\frac{28}{11}$	$\frac{15}{11}$	۶۳
X_1	۰	۱	$\frac{7}{22}$	$\frac{1}{22}$	$\frac{7}{2}$
X_2	۱	۰	$-\frac{1}{22}$	$\frac{3}{22}$	$\frac{9}{2}$

پاسخ:

گام ۱ و ۲ انجام شده اند.

گام ۳- متغیر x_1 شرط عدد صحیح بودن را دارد اما مقدار آن $\left(\frac{9}{2}\right)$ غیر عدد صحیح است. معادله برش را برای آن می نویسیم:

$$sg_i - \left\{ \sum \overset{+}{aij}\ wj + \left(\frac{[bi]_F}{[bi]_{F-1}} \right) \sum \overset{-}{aij}\ wj \right\} = -[bi]_F$$

$$sg_1 - \left\{ \frac{3}{22} s_2 + \left(\frac{\left[\frac{1}{2}\right]}{\left[\frac{1}{2}\right] - 1} \right) \left(-\frac{1}{22} \right) s_1 \right\} = -\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{3}{22} s_2 - \frac{1}{22} s_1 + sg_1 = -\frac{1}{2}$$

	X_1	X_2	S_1	S_2	Sg_1	R.H.S
Z	۰	۰	$\frac{28}{11}$	$\frac{15}{11}$	۰	۶۳
X_1	۰	۱	$\frac{7}{22}$	$\frac{1}{22}$	۰	$\frac{7}{2}$
X_2	۱	۰	$-\frac{1}{22}$	$\frac{3}{22}$	۰	$\frac{9}{2}$
Sg_1	۰	۰	$-\frac{1}{22}$	$-\frac{3}{22}$	۱	$-\frac{1}{2}$
Z	۰	۰	$\frac{23}{11}$	۰	۱۰	۵۸
X_1	۰	۱	$\frac{10}{33}$	۰	$-\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$
X_2	۱	۰	$-\frac{1}{11}$	۰	۱	۴
S_2	۰	۰	$\frac{1}{3}$	۱	$-\frac{22}{3}$	$\frac{11}{3}$

گام ۴- پس از اضافه کردن معادله برش و حل با روش سیمپلکس ثانویه، مجدداً به گام ۲ می رویم.

گام ۲- x_1شرط عدد صحیح بودن را داشت که مقدار آن عدد صحیح است، پس داریم:

$$x_1^* = 4 \ , x_2^* = \frac{10}{3}$$

$$s_2^* = \frac{11}{3} \quad , z^* = 58$$

۳۳- الگوریتم شمارش ضمنی (بالاس)

ابتدا در صورت استاندارد نبودن ، مدل را استاندارد کنید، فرم استاندارد که در این الگوریتم مورداستفاده قرار می گیرد به شکل زیر است:

$$\text{Max } Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad c_j \le 0 \quad : \text{که}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le bi \qquad ,(i = 1,2,.....,m)$$

$$X_j = 0 \text{ یا } 1$$

در صورتی که مدل استاندارد نبود، با توجه به مورد، طبق موارد زیر عمل می کنیم:

۱) در صورتی که تابع هدف Min بود، با ضرب کردن تابع هدف در ۱- آنرا به Max تبدیل می کنیم.

۲) اگر $Cj>0$ باشد، با اعمال تغییر متغیر $Y_j = 1-Xj$ می توان ضریب Cj را به منفی تبدیل کرد.

۳) اگر محدودیتی علامت مساوی داشت، آنرا در ۱- ضرب کرده و تبدیل به کوچکتر مساوی می کنیم (در این حال، منفی شدن عدد سمت راست محدودیت ، مشکلی را در فرایند حل به وجود نمی آورد)

۴) اگر محدودیتی علامت مساوی داشت، آنرا به دو محدودیت نامساوی تبدیل می کنیم. توجه شود که پس از تبدیل محدودیت مساوی به دو محدودیت با علامت نامساوی، هر دو محدودیت حاصله باید علامت کوچکتر مساوی داشته باشند و برای این کار می توانیم از بند ۳ استاندارد سازی استفاده کنیم.

گامهای الگوریتم شمارش ضمنی بالاس

۱) مسأله را به فرم استاندارد درآورید.

۲) در صورتی که هیچ نقطه ی آغازی برای مسأله معرفی نشده و همه متغیرها آزاد باشند، یک حد پائین بصورت $Z_L = -\infty$ ایجاد کنید. هر گاه در فرایند حل به یک جواب موجه رسیدید، این جواب را با Z_L قبلی جایگزین کنید.

۳) یکی از متغیرها را برای انشعاب انتخاب کنید. برای این کار از ضوابط انشعاب استفاده کنید.

۴) مقدار تابع هدف، جواب جزئی و متغیرهای آزاد گره های حاصل از انشعاب را محاسبه کنید.

۵) ضوابط به عمق رسیدن را برای گره های حاصل از انشعاب بررسی کنید.
در صورتی که گرهی به عمق رسیده بود، عملیات در آن شاخه خاتمه یافته است. در صورتی که به جواب موجهی رسیده بودیم و مقدارش بهتر از Z_L بوده آن مقدار را بعنوان Z_L جدید جایگزین کنید.

۶) اگر هیچ جواب جزئی باقی نماند، توقف کنید، در غیر اینصورت به گام ۳ بروید.

ضوابط انشعاب (مربوط به گام ۳)

۱ - اگر در تمام محدودیت هایی که دارای S منفی هستند، ضریب متغیری مثبت بود، آن متغیر را برای انشعاب استفاده نکنید.

۲ - متغیر آزاد X_j که ضریب آن در تابع هدف، C_j می باشد، اگر در رابطه زیر صدق کند برای انشعاب انتخاب نمی شود.

$$Z + C_j \le Z_L$$

۳ - اگر طبق ضوابط ۲ و ۱ بیش از یک متغیر برای انشعاب باقی مانده باشد، برای انتخاب یکی از آنها، از رابطه زیر استفاده نموده و از بین قدر مطلق جوابهای بدست آمده، کوچکترین را انتخاب نمائید.
(یعنی متغیری برای انشعاب انتخاب می شود که قدر مطلق مجموع مقادیر منفی متغیرهای کمکی را حداقل نماید)

$$V_j = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Min}\left(O, si - aij\right)$$

ضوابط به عمق رسیدن (مربوط به گام ۵)

هر گره به عمق می رسد اگر:

۱) به جواب موجهی رسید (S های مربوط به آن گره ۰ و یا + باشند)

۲) Z آن گره کمتر از Z_L باشد.

۳) امکان رسیدن به جواب موجه از طریق آن گره موجود نباشد. یعنی برای گرهی که دارای S منفی است رابطه زیر برقرار باشد:

$$\left| \text{مجموع ضرائب منفی متغیرهای آزاد محدودیت iام} \right| < \left| \begin{matrix} Si \\ \text{منفی آن گره} \end{matrix} \right|$$

این رابطه اگر برای یک محدودیت گره هم صدق بکند، آن گره به عمق رسیده است.

۴) متغیر آزادی برای انشعاب موجود نباشد.

مثال) مسأله برنامه ریزی صفر- یک زیر را حل کنید؟

$$\text{Max } Z = -۵x_۱ - ۲x_۲ - ۴x_۳ - ۴x_۴ - x_۵$$

$$\begin{cases} ۵x_۱ + ۴x_۲ + ۶x_۳ - ۲x_۴ + x_۵ \geq ۵ \\ -۲x_۱ - ۵x_۲ + ۴x_۳ - ۶x_۴ - x_۵ \leq ۱۲ \end{cases}$$

$$Xj = ۰ \text{ یا } ۱ \ , \ (j = ۱,۲,۳,۴,۵)$$

چرخه اول- گام ۱)

ابتدا شرایط استاندارد بودن را بررسی می کنیم

- تابع هدف Max است.✓
- تمامی ضرایب متغیرها (Cj) ها در تابع هدف، دارای علامت منفی هستند.✓
- محدودیت با علامت مساوی وجود ندارد، اما علامت محدودیت اول بزرگتر مساوی است، از اینرو این محدودیت را در ۱- ضرب می‌کنیم.

مدل استاندارد شده به شکل زیر است:

$$\text{Max } Z = -۵x_۱ - ۲x_۲ - ۴x_۳ - ۴x_۴ - x_۵$$

$$\begin{cases} -۵x_۱ - ۴x_۲ - ۶x_۳ + ۲x_۴ - x_۵ + s_۱ = -۵ \\ -۲x_۱ - ۵x_۲ + ۴x_۳ - ۶x_۴ - x_۵ + s_۲ = ۱۲ \end{cases}$$

$$Xj = ۰ \text{ یا } ۱ \ , \ (j = ۱,۲,۳,۴,۵)$$

چرخه اول – گام ۲)

با توجه به اینکه به هیچ جواب موجهی نرسیده ایم $Z_L = -\infty$ را به عنوان حد پائین برای جواب مسأله در نظر می گیریم.

چرخه اول – گام ۳)

برای انتخاب متغیر جهت انشعاب از ضوابط انشعاب استفاده می کنیم.

ضابطه ۱: در حال حاضر همه متغیرها مقدار صفر دارند و در اینصورت داریم $(s_1 ، s_2)=(-5، 12)$، در محدودیت اول که s منفی دارد، متغیر x_4 دارای ضریب مثبت است، از اینرو این متغیر برای انشعاب انتخاب نمی شود.

ضابطه ۲: در حال حاضر هیچ جواب موجهی برای مسأله ارائه نشده است، از اینرو این ضابطه در این گره کاربرد ندارد.

ضابطه ۳: از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$V_j = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Min}(0, si - aij)$$

$$V_1 = \mathrm{Min}(0,\ -5-(-5)) + \mathrm{Min}(0, 12-(-2)) = 0+0=0$$

$$V_2 = \mathrm{Min}(0,\ -5-(-4)) + \mathrm{Min}(0, 12-(-5)) = -1+0=-1$$

$$V_3 = \mathrm{Min}(0,\ -5-(-6)) + \mathrm{Min}(0, 12-4) = 0+0=0$$

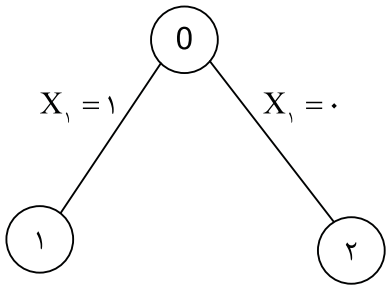
$V_4 =$ این متغیر طبق ضابطه اول حذف شد

$$V_5 = \mathrm{Min}(0,\ -5-(-1)) + \mathrm{Min}(0, 12-(-1)) = -4+0=-4$$

پس متغیر x_1 یا x_2 که در میان اعداد بدست آمده دارای کوچکترین قدر مطلق هستند برای انشعاب انتخاب می شود.

چرخه اول – گام ۴)

$Z_L = -\infty$



$Z = -5$	$Z = 0$
$S = (0,14)$	$S = (-5,12)$
$F = (2,3,4,5)$	$F = (2,3,4,5)$

گره ۱- حالتی را نشان می دهد که $x_1 = 1$ است. مقدار Z با جایگذاری $x_1 = 1$ در تابع هدف بدست آمده. مقدار s_2 ، s_1 نیز با جایگذاری $x_1 = 1$ در محدودیت اول و دوم بدست آمده . $F=(2,3,4,5)$ به این معناست که شماره گره های داده شده مربوط به گره های آزاد است و هنوز انشعابی روی آنها صورت نگرفته است. اعداد مربوط به گره ۲ نیز با همین روال و با $x_1 = 0$ محاسبه گردیده اند.

چرخه اول – گام ۵)

بررسی ضوابط به عمق رسیدن برای گره ۱

ضابطه ۱) طبق ضابطه ۱ ، این گره به جواب موجهی رسیده است، چون s_2 و s_1 مربوط به این گره مقادیر ۰ و مثبت هستند.

بررسی ضوابط به عمق رسیدن برای گره ۲

ضابطه ۱) s_1 در گره ۲ دارای مقداری منفی است، از اینرو طبق این ضابطه گره ۲ به عمق نرسید.

ضابطه ۲) مقدار تابع هدف این گره کمتر از Z_L نیست، از اینرو طبق این ضابطه گره ۲ به عمق نرسید.

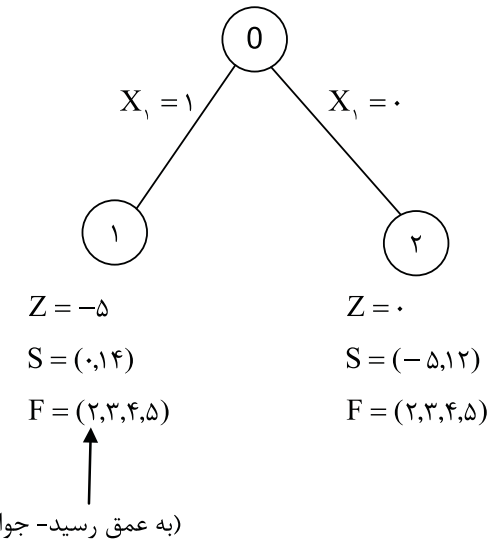
ضابطه ۳) s_1 در این گره منفی است، پس داریم:

$$|(-۴)+(-۶)+(-۱)| < |-۵| \qquad ۱۱<۱$$

با توجه به اینکه نامعادله برقرار نیست، طبق این ضابطه نیز به عمق نرسیدیم.

به عمق رسیدن را با یک فلش از پائین به بالا، در زیر گره به عمق رسیده نشان می دهیم، همچنین با توجه به اینکه گره ۱ به عمق رسید و جواب موجهی ارائه داد، مقدار z گره اول $Z_L = -\infty$ را با (z = -۵) جایگزین می کنیم: پس داریم:

$$Z_L = \cancel{-\infty} = -۵$$



چرخه اول- گام ۶) با توجه به بررسی شدن هردوگره، به گام ۳ می رویم.

چرخه دوم- گام ۳) توجه داشته باشید که این چرخه طبق گام ششم الگوریتم، از گام ۳ شروع می شود ، برای گره ۲، یک متغیر برای انشعاب انتخاب می کنیم، برای این کار از ضوابط انشعاب استفاده می شود.

ضابطه ۱- در این گره s_1 منفی است، در محدودیت اول (که مربوط به s_1 است) متغیر x_4 ضریب مثبت دارد، پس بنا بر این ضابطه x_4 برای انشعاب انتخاب نمی شود.

ضابطه ۲-متغیرها را طبق رابطه $Z + Cj \le Z_L$ چک می کنیم و اگر در این رابطه صدق کردند برای انشعاب انتخاب نمی شوند.

$x_1 \longrightarrow$ این متغیر انتخاب شده

$x_2 \longrightarrow 0 + (-2) \le -5 \qquad \times$

$x_3 \longrightarrow 0 + (-4) \le -5 \qquad \times$

$x_4 \longrightarrow$ طبق ضابطه ۱ حذف شد

$x_5 \longrightarrow 0 + (-1) \le -5 \qquad \times$

پس طبق این ضابطه، هیچ متغیری حذف نمی شود.

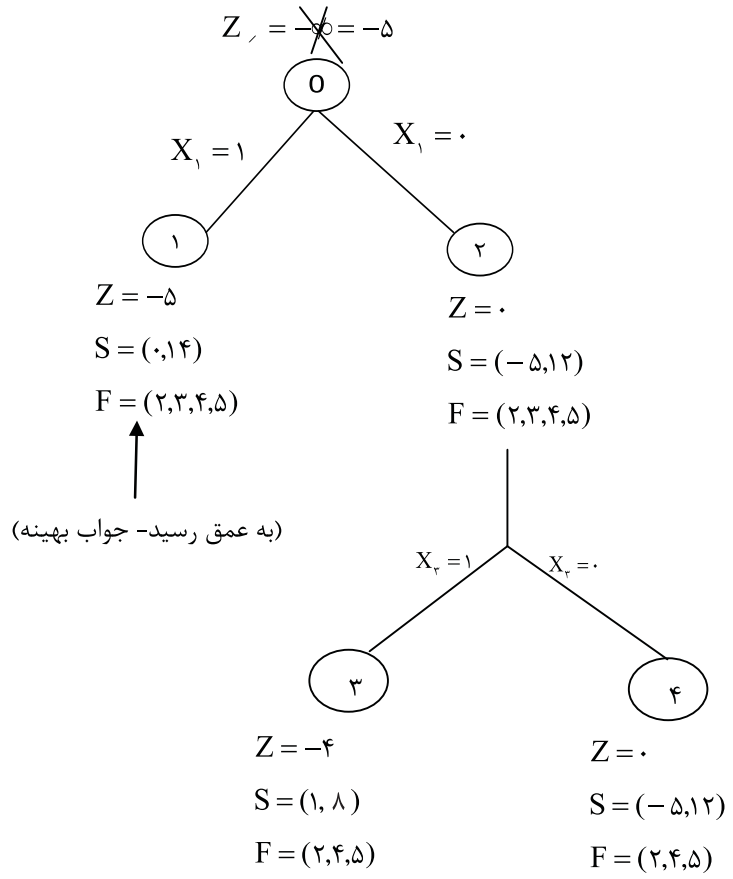
ضابطه ۳- طبق محاسبات مربوط به این ضابطه در چرخه اول داریم:

$$V_2 = -1 \qquad V_3 = 0 \qquad V_5 = -4$$

از نظر قدر مطلق، V_3 کمترین مقدار را دارد، از اینرو برای انشعاب انتخاب می شود.

چرخه دوم- گام ۴)

این محاسبات در ادامه محاسبات چرخه اول نوشته می شود



محاسبات گره ۳ با (x_3=۱ و x_1=۰) انجام گرفته و محاسبات مربوط به گره ۴ با (x_3=۰ و x_1=۰)

چرخه دوم – گام ۵)

بررسی ضوابط به عمق رسیدن برای گره ۳

ضابطه ۱) با توجه به اینکه s_2 و s_1 در این گره دارای مقادیر مثبتی هستند، این گره به جواب موجهی رسیده و در واقع به عمق رسیده ست. مقدار Z_L را به ۴- افزایش میدهیم.

بررسی ضوابط به عمق رسیدن برای گره ۴

ضابطه ۱) s_1 گره ۴ منفی است پس طبق این ضابطه ، گره ۴ به عمق نرسید.

ضابطه ۲- مقدار Z گره چهارم ۰ است و از ۴- کمتر نیست.

ضابطه ۳- مقدار $s_۱$ منفی است پس برای محدودیت اول:

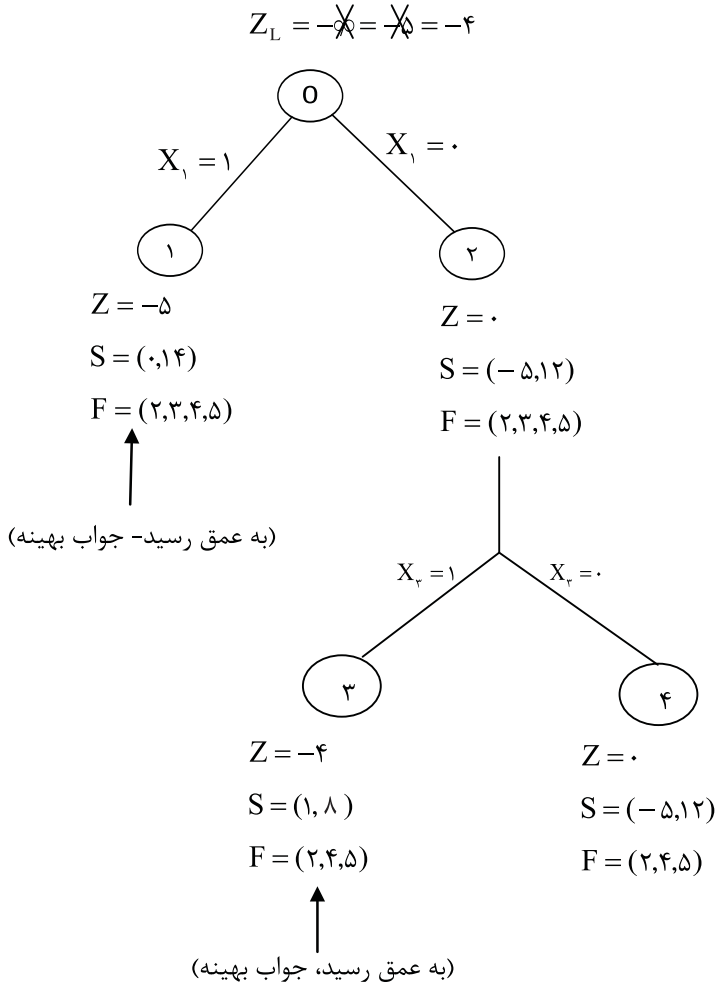
$$|(-۴)+(-۱)| < |-۵| \qquad ۵ < ۵ \qquad \times$$

رابطه بالا برقرار نیست پس طبق این ضابطه هم گره ۴ به عمق نرسید.

ضابطه ۴- متغیر آزاد برای انشعاب موجود است.

طبق ضوابط فوق، گره چهارم به عمق نرسیده است.

جواب، تا این مرحله از حل به شکل زیر است:



چرخه دوم- گام ۶) هر دو جواب جزئی را بررسی کردیم، پس به گام ۳ می‌رویم

چرخه سوم- گام ۳) انتخاب متغیر برای انشعاب (توجه کنید که متغیرهای آزاد برای انشعاب x_5 و x_4 و x_2 هستند)

ضابطه ۱- مقدار s_1 این گره منفی است، x_4 در محدودیت اول (مربوط به s_1) دارای مقدار مثبت است، پس برای انشعاب انتخاب نمی‌شود.

ضابطه ۲-

$x_2 \longrightarrow 0+(-2) \leq -4 \qquad \times$

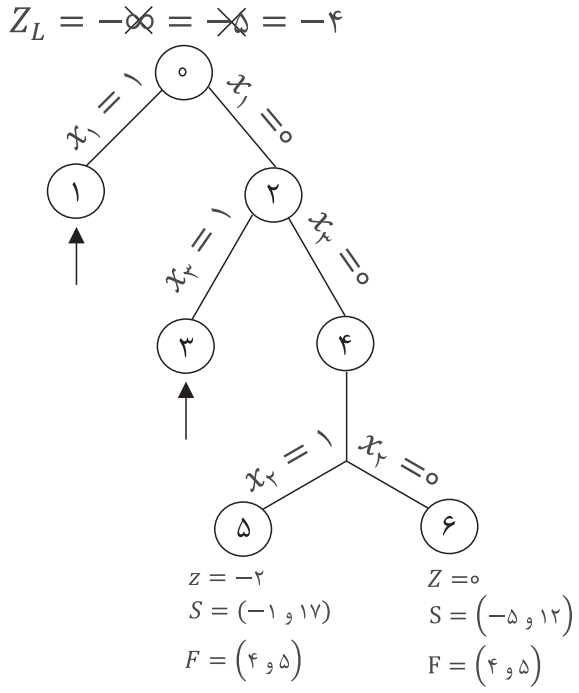
$x_4 \longrightarrow$ طبق ضابطه ۱حذف شد

$x_5 \longrightarrow 0+(-1) \leq -4 \qquad \times$

پس طبق این ضابطه هیچ‌متغیری کنار نمی‌رود.

ضابطه ۳- داریم $V_5 = -4$ ، $V_2 = -1$ ، قدر مطلق V_2 کوچکتر است، پس x_2 را برای انشعاب انتخاب می‌کنیم.

چرخه سوم – گام ۴)



چرخه سوم گام ۵)

بررسی ضوابط به عمق رسیدن برای گره ۵

ضابطه ۱- به جواب موجه نرسید چون s_1 منفی است.

ضابطه ۲- عدد (۲-) کمتر از(۴-) نیست پس به عمق نمی‌رسد.

ضابطه ۳- مقدار s_1 این گره منفی است (۱-)، پس برای محدودیت اول داریم:

$$|-1| < |-1| \qquad 1 < 1 \qquad \times$$

رابطه فوق برقرار نیست، پس طبق این ضابطه هم گره ۵ به عمق نمی‌رسد.

ضابطه ۴- هنوز متغیر x_5 و x_4 آزاد هستند.

طبق ضوابط فوق، گره ۵ به عمق نرسید.

بررسی ضوابط به عمق رسیدن گره ۶

ضابطه ۱- به جواب موجه نرسید چون s_1 این گره منفی است.

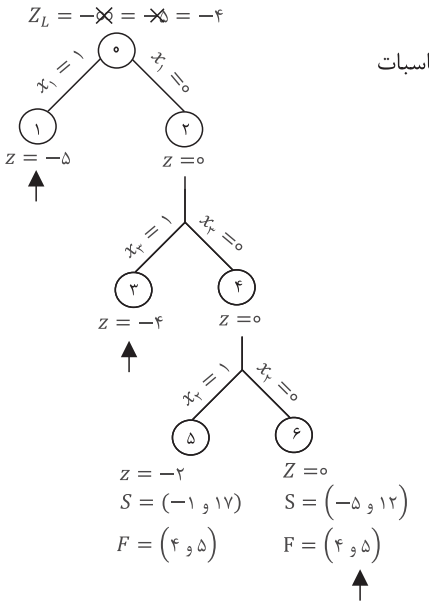
ضابطه ۲- عدد صفر کمتر از(۴-) نیست.

ضابطه ۳- در این گره $s_۱$ دارای مقدار منفی است، پس رابطه زیر را بررسی می‌کنیم:

$$|-۲| < |-۵| \quad \Rightarrow \quad ۲ < ۵ \quad \checkmark$$

رابطه برقرار است، پس این گره به عمق رسیده است و امکان رسیدن به جواب موجه از طریق این گره میّسر نیست.

در نتیجه مقدار Z در این چرخه تغییری نکرد و تمام محاسبات تا این قسمت (بصورت خلاصه) به شکل روبرو است :



(به عمق رسید، بدون جواب موجه)

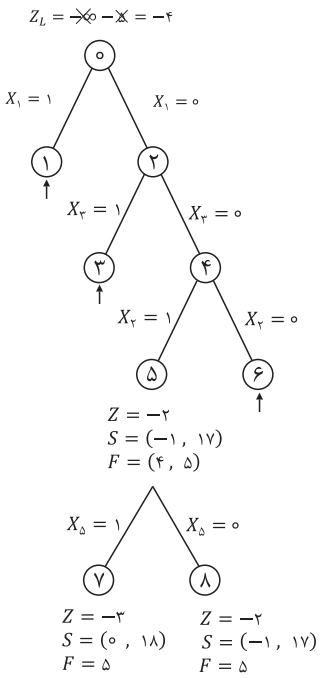
چرخه سوم- گام شش) به گام سوم می‌رویم

چرخه چهارم – گام ۳)

ضابطه ۱- متغیر $x_۴$ را برای انشعاب انتخاب می کنیم.

چون تنها متغیر باقی مانده $x_۵$ است، آنرا برای انشعاب انتخاب می‌کنیم.

چرخه چهارم- گام ۴)



چرخه چهارم- گام ۵)

ضوابط به عمق رسیدن برای گره ۷

ضابطه ۱- طبق ضابطه ۱ گره ۷ به عمق می‌رسد و جواب موجهی ارائه می‌کند. در نتیجه Z_L به ۳- بهبود می‌یابد.

ضوابط به عمق رسیدن برای گره ۸

ضابطه ۱- به عمق نمی‌رسد.

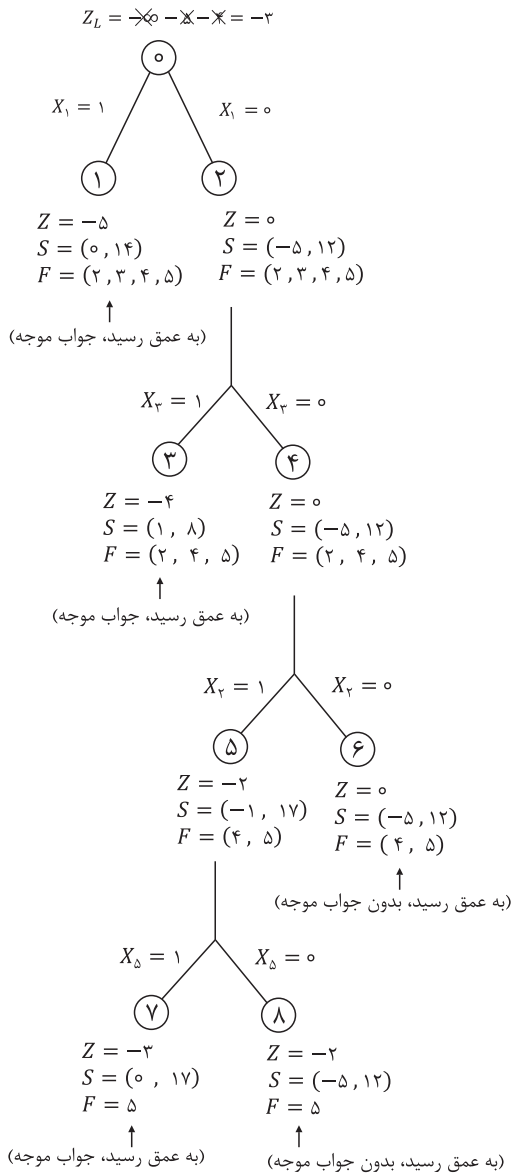
ضابطه ۲- مقدار Z این گره کمتر از Z_L نیست.

ضابطه ۳- امکان رسیدن به جواب موجه را برای محدودیت اول (که s_1 آن(۱-) است) بررسی می‌کنیم:

$$\left|0\right| < |-1| \quad \Rightarrow \quad 0 < 1$$

در نتیجه امکان رسیدن به جواب موجه از طریق این گره وجود ندارد و این گره هم به عمق می‌رسد.

حل به پایان رسیده و کلیه مراحل حل و جواب نهایی به شکل زیر است:



جواب نهایی:

$Z^* = -3 \qquad X_1 = 0 \qquad X_2 = 1 \qquad X_3 = 0 \qquad X_4 = 0 \qquad X_5 = 1$

۳۴- بازیهای دو نفره با مجموع صفر و بی‌ثبات ۲×۲

ماتریس زیر ، سود بازیکن A را در برابر زیان بازیکن B نشان می‌دهد، بهترین استراتژی بازیکنان و ارزش بازی چقدر است؟

A \ B	B_1	B_2
A_1	۳	۴
A_2	۶	۲

ابتدا ثبات بازی دو نفره فوق را بررسی می‌کنیم، یعنی (سود) Maximin که مربوط به بازیکن A است را با (ضرر) Minimax که مربوط به بازیکن B می‌باشد مقایسه می‌کنیم.

A \ B	B_1	B_2	
A_1	۳	۴	۳ → Maximin
A_2	۶	۲	
	۶	۴	

Minimax

$$\text{Maximin} \neq \text{Minimax}$$

در نتیجه بازی بی‌ثبات است و می‌دانیم برای حل یک ماتریس بازی بی‌ثبات ۲×۲ بهتر است از روش جبری استفاده کنیم. روش جبری در قالب این مثال توضیح داده می‌شود.

ابتدا جدول فوق را به شکل زیر می‌نویسیم:

	A \ B	q_1	q_2
		B_1	B_2
P_1	A_1	۳	۴
P_2	A_2	۶	۲

P_1 : نسبت زمانی است که A_1 از طرف A انتخاب می‌شود.

P_2 : نسبت زمانی است که A_2 از طرف A انتخاب می‌شود.

q_1 : نسبت زمانی است که B_1 از طرف B انتخاب می‌شود.

q_2 : نسبت زمانی است که B_2 از طرف B انتخاب می‌شود.

(می‌دانیم که در این بازی بی‌ثبات، در بعضی موارد A_1 و گاهی A_2 از طرف A و همچنین گاهی B_1 و گاهی B_2 از طرف B انتخاب می‌شوند)

از طرفی داریم:

$$P_1 + P_2 = 1$$
$$q_1 + q_2 = 1$$

برای بدست آوردن مقادیر P_1 و P_2 به طریق زیر عمل می‌کنیم:

* سود مورد انتظار A، اگر بازیکن B ، استراتژی B_1 را انتخاب کند برابر است با : $3P_1+6P_2$

* سود مورد انتظار A، اگر بازیکن B ، استراتژی B_2 را انتخاب کند برابر است با : $4P_1+2P_2$

برای ایجاد نقطه تعادل، دو معادله فوق را با هم برابر قرار میدهیم:

$$3P_1 + 6P_2 = 4P_1 + 2P_2 \Rightarrow -P_1 + 4P_2 = 0$$

از طرفی میدانیم که رابطه $P_1 + P_2 = 1$ همواره وجود دارد، پس داریم:

$$\begin{cases} -P_1 + 4P_2 = 0 \\ P_1 + P_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 5P_2 = 1 \Rightarrow P_2 = 0/2 \Rightarrow P_1 = 0/8$$

پس نتیجه شد $P_2 = 0/2$ و $P_1 = 0/8$

برای بدست آوردن مقادیر q_2 و q_1 نیز به طریق زیر عمل می‌کنیم:

*ضرر مورد انتظار B، اگر بازیکن A ، استراتژی A_1 را انتخاب کند برابر است با : $3q_1 + 4q_2$

* ضرر مورد انتظار B، اگر بازیکن A ، استراتژی A_2 را انتخاب کند برابر است با : $6q_1 + 2q_2$

برای ایجاد نقطه تعادل، دو معادله فوق را با هم برابر قرار میدهیم:

$$3q_1 + 4q_2 = 6q_1 + 2q_2 \Rightarrow -3q_1 + 2q_2 = 0$$

از طرفی میدانیم که رابطه $q_1 + q_2 = 1$ همواره وجود دارد، پس داریم:

$$\begin{cases} -3q_1 + 2q_2 = 0 \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 5q_2 = 3 \Rightarrow q_2 = \frac{3}{5} \Rightarrow q_1 = \frac{2}{5}$$

پس نتیجه شد $q_2 = 0/6$ و $q_1 = 0/4$

یعنی:

نسبت زمانی که $A_۱$ از طرف A انتخاب می شود برابر است با ۰/۸

نسبت زمانی که $A_۲$ از طرف A انتخاب می شود برابر است با ۰/۲

نسبت زمانی که $B_۱$ از طرف B انتخاب می شود برابر است با ۰/۴

نسبت زمانی که $B_۲$ از طرف B انتخاب می شود برابر است با ۰/۶

برای تعیین ارزش بازی نیز می‌توان مقادیر p و q را در یکی از معادلات سود مورد انتظار A یا ضرر موردانتظار B قرار داد (قرار دادن مقادیر p یا q در هر کدام از چهار معادله، جواب یکسانی را بدست می‌دهد):

$$۳P_۱ + ۶P_۲ \Rightarrow ۳(۰/۸) + ۶(۰/۲) = ۳/۶$$

یا

$$۴P_۱ + ۲P_۲ \Rightarrow ۴(۰/۸) + ۲(۰/۲) = ۳/۶$$

یا

$$۳q_۱ + ۴q_۲ \Rightarrow ۳(۰/۴) + ۴(۰/۶) = ۳/۶$$

یا

$$۶q_۱ + ۲q_۲ \Rightarrow ۶(۰/۴) + ۲(۰/۶) = ۳/۶$$

پس ارزش بازی برابر است با:

V = ۳/۶

۳۵-بازیهای دو نفره با مجموع صفر و بی‌ثبات ۲ × m یا n × ۲

در این نوع بازیها یک رقیب فقط ۲ استراتژی و رقیب دیگر بیشتر از ۲ استراتژی دارد. در این حالت می‌توان با استفاده از روش ترسیمی مسأله را حل نمود. این روش در قالب مثال توضیح داده می‌شود.

مثال) جدول سود A در مقابل زیان B به شرح ماتریس زیر است. بهترین استراتژی رقبا و ارزش بازی چقدر است؟

A \ B	$B_۱$	$B_۲$	$B_۳$
$A_۱$	۴	۳	۱
$A_۲$	-۲	۱	۴

ابتدا ثبات بازی فوق را بررسی می‌نمائیم:

A \ B	$B_۱$	$B_۲$	$B_۳$	
$A_۱$	۴	۳	۱	۱
$A_۲$	-۲	۱	۴	-۲
	۴	۳	۴	

Maximin

Minimax

Maximin ≠ Minimax

پس با یک بازی دو نفره بی‌ثبات ۳×۲ مواجهیم، در نتیجه از روش ترسیمی برای حل آن استفاده می‌نمائیم:

ابتدا جدول را به شکل زیر می‌نویسیم:

	A \ B	$q_۱$ $B_۱$	$q_۲$ $B_۲$	$q_۳$ $B_۳$
$P_۱$	$A_۱$	۴	۳	۱
$P_۲$	$A_۲$	-۲	۱	۴

و در این جدول:

$P_۱$: نسبت زمانی است که $A_۱$ از طرف A انتخاب می‌شود

$P_۲$: نسبت زمانی است که $A_۲$ از طرف A انتخاب می‌شود

$q_۱$: نسبت زمانی است که $B_۱$ از طرف B انتخاب می‌شود

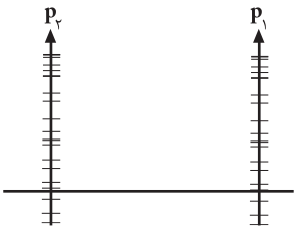
$q_۲$: نسبت زمانی است که $B_۲$ از طرف B انتخاب می‌شود

$q_۱$: نسبت زمانی است که $B_۳$ از طرف B انتخاب می‌شود

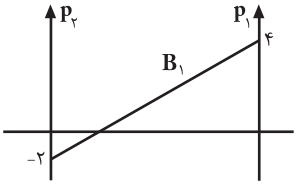
و همچنین برای متغیرهای فوق روابط زیر همواره برقرار است:

$$\begin{cases} P_1 + P_2 = 1 \\ q_1 + q_2 + q_3 = 1 \end{cases}$$

ابتدا یک محور افقی رسم کرده و دو محور مدرّج با نام P_1 و P_2 را بر آن عمود می‌کنیم:

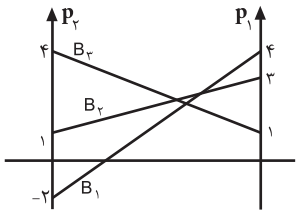


سپس خطوط مربوط به B_1 ، B_2، B_3 را با توجه به مقدار مربوط به P_1 و P_2 هر یک از آنها، در شکل بالا رسم می‌کنیم، بعنوان مثال برای B_1 داریم:

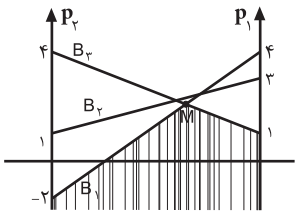


		B_1	B_2	B_3
P_1	A	۴		
P_2	B	-۲		

و پس از تکمیل رسم داریم:



سپس در شکل فوق، ابتدا ناحیه‌ای را که در پایان B_1 ، B_2، B_3 قرار دارد را هاشور می‌زنیم و خط اضافه (در تشکیل منطقه هاشور خورده) را حذف می‌کنیم:



مشاهده می‌گردد که خط B_2 زائد است، از اینرو برای رسم خطوط A در نمودار بعد، ستون مربوط به B_2 حذف می‌گردد. زائد بودن بدین معناست که این استراتژی (B_2) هیچگاه از طرف بازیکن B انتخاب نمی‌شود. بالاترین نقطه فضای هاشور خورده که حاصل خط B_1 و B_3 می‌باشد را نقطه M می‌نامیم. برای تعیین مختصات نقطه M نیز فقط B_1 و B_3 را مدنظر قرار می‌دهیم و به طریق زیر عمل می‌کنیم:

*سود مورد انتظار A ، اگر بازیکن B، استراتژی B_1 را انتخاب کند برابر است با : $4P_1 - 2P_2$

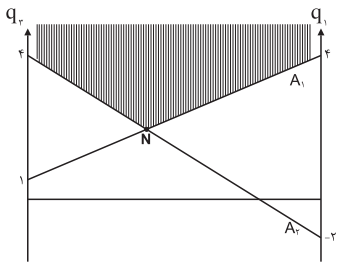
*سود مورد انتظار A ، اگر بازیکن B، استراتژی B_3 را انتخاب کند برابر است با : $P_1 + 4P_2$

$$\Rightarrow \quad 4P_1 - 2P_2 = P_1 + 4P_2 \Rightarrow 3P_1 - 6P_2 = 0$$

و با توجه به اینکه $P_1 + P_2 = 1$ است داریم:

$$\begin{cases} 3P_1 - 6P_2 = 0 \\ P_1 + P_2 = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad P_1 = \frac{2}{3} \ , P_2 = \frac{1}{3}$$

سپس یک شکل دیگر با دو محور q_1 و q_3 رسم کرده و خطوط مربوط به A_1 و A_2 را رسم می‌کنیم (محور q_2 به این دلیل مدنظر قرار نگرفت که در مرحله پیش حذف شد):



در این شکل نیز ابتدا ناحیه‌ای را که در بالای A_1 و A_2 قرار دارد، در نظر گرفته و سپس در این ناحیه پائین‌ترین نقطه (نقطه N) را انتخاب کرده و مختصات آنرا بدست می‌آوریم.

*سود مورد انتظار B ، اگر بازیکن A، استراتژی A_1 را انتخاب کند برابر است با : $4q_1 + q_3$

* سود مورد انتظار B ، اگر بازیکن A، استراتژی A_2 راانتخاب کند برابر است با: $-2q_1 + 4q_3$

$$\Rightarrow \quad 4q_1 + q_3 = -2q_1 + 4q_3 \Rightarrow 6q_1 - 3P_3 = 0$$

و با توجه به اینکه $q_1 + q_2 + q_3 = 1$ است داریم:

$$\begin{cases} 6q_1 - 3q_3 = 0 \\ q_1 + q_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad q_1 = \frac{1}{3} \quad q_2 = 0 \quad , \quad q_3 = \frac{2}{3}$$

در نتیجه داریم:

نسبت زمانی که A_1 از طرف A انتخاب می‌شود برابر است با : $\frac{2}{3}$

نسبت زمانی که A_2 از طرف A انتخاب می‌شود برابر است با : $\frac{1}{3}$

نسبت زمانی که B_1 از طرف B انتخاب می‌شود برابر است با : $\frac{1}{3}$

نسبت زمانی که B_2 از طرف B انتخاب می‌شود برابر است با : ۰

نسبت زمانی که B_3 از طرف B انتخاب می‌شود برابر است با : $\frac{2}{3}$

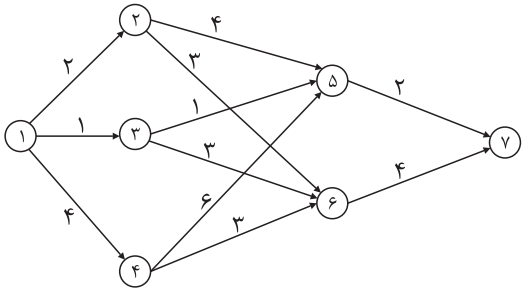
و برای بدست آوردن ارزش بازی، مقادیر p یا q محاسبه شده را در معادلات سود مورد انتظار بازیکن A و یا B قرار میدهیم:

$$4P_1 - 2P_2 \xrightarrow{P_1=\frac{2}{3} \quad P_2=\frac{1}{3}} 4\left(\frac{2}{3}\right) - 2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{6}{3} = 4$$

ارزش بازی = V =۲

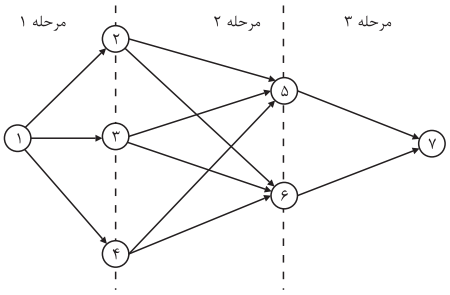
۳۶- برنامه ریزی پویا

کوتاهترین مسیر در شبکه زیر را از طریق برنامه‌ریزی پویا بیابید؟



ابتدا مرحله‌ها را مشخص می‌کنیم، سپس به بررسی وضعیت در هر مرحله می‌پردازیم، بعد متغیر تصمیم (x) را معین کرده و تابع برگشت (تابع تکراری) را معین می‌کنیم. سپس مرحله به مرحله پیش می‌رویم تا جواب بدست آید.

مرحله : در این شکل سه مرحله وجود دارد (هرمرحله یک مسأله فرعی است)، این سه مرحله در شکل زیر نشان داده شده‌اند.



وضعیت (s): در این مثال ، وضعیت، گرهی است که در ابتدای هر مرحله در آن قرار داریم. در مرحله سوم، وضعیت عبارتست از گره ۵ و۶، زیرا در ابتدای مرحله ۳ ، در گره ۵ یا ۶ هستیم و می‌خواهیم به گره ۷ برسیم.

در مرحله دوم، وضعیت، گره ۴، ۳، ۲ است و در مرحله اول، وضعیت، گره ۱ است.

متغیر تصمیم : گرهی که در هر مرحله برای رفتن انتخاب می‌شود متغیر تصمیم است.

توضیح: هنگامی که ما در مرحله‌ای مشخص، در یک وضعیت مشخص (یک گره معین) قرار داریم، با این تصمیم پیش رو هستیم که به کدام گره برویم، از اینرو گرهی که برای رفتن انتخاب می‌شود متغیر تصمیم است.

تابع برگشت :

ارزش سیاست بهینه مرحله بعدی + ارزش جاری = تابع برگشت

منظور از ارزش، همان اعداد روی شاخه‌هاست که بیانگر فاصله است. ما در پی حداقل کردن این ارزش (فاصله) هستیم. ارزش جاری مربوط به اعداد مرحله‌ای است که در آن هستیم و منظور از ارزش سیاست بهینه مرحله بعدی بهترین مقداری است که از مرحله‌ی قبلی بدست آمده.

(با حل مثال توضیحات بیشتر ارائه می‌گردد)

با توجه به این که این مسأله (و اکثر مسائل در برنامه‌ریزی پویا) از طریق حرکت در مسیر پس رو حل می‌شود، ابتدا جدول مربوط به مرحله سوم و سپس دوم و اول رسم می‌گردند. حالت کلی جدول به صورت زیر است.

(متغیر تصمیم) X / S (وضعیت)	$f_i(S, x_i)$ (ارزش کل) ستونهای متغیرهای تصمیم در هر مرحله	(ارزش سیاست بهینه) f_i^*	(بهترین تصمیم) x_i^*
	(ارزش مربوط به هر سیاست که از طریق تابع برگشتی محاسبه می‌گردد)		

مرحله ۳)

$x_۳$ / S	(ارزش کل) ۷	$f_۳^*$	$x_۳^*$
۵	۲	۲	۷
۶	۴	۴	۷

برای سطر اول با توجه به این که فقط یک مقصد وجود دارد، در نتیجه بهترین سیاست (و تنها عمل ممکن) اینست که به همان گره برویم که گره ۷ است (برای سطر دوم هم همین طور)

برای سطر اول با توجه به این که فقط یک مقصد وجود دارد (مقصد ۷) در نتیجه برای تعیین ارزش سیاست بهینه هیچ انتخابی وجود ندارد همان ارزش محاسبه شده در ستون قبل را می‌نویسیم (برای سطر دوم هم همین طور)

بالای ستون: متغیر تصمیم در این مرحله فقط گره ۷ است.

میان ستون:

ارزش مربوط به هر سیاست بیانگر فاصله بین گرهی که در آن قرار داریم تا گره مقصد است.

هنگامی که در مرحله ۳ هستیم، دو وضعیت ۵ و ۶ وجود دارند.

مرحله ۲)

$$f_2(s,x_2) =$$

S \ x_3	$c(s,x_2)+f_3^*(x_2)$ ۵	$c(s,x_2)+f_3^*(x_2)$ ۶	f_2^*	x_2^*
۲	۴+۲=۶	۳+۴ =۷	۶	۵
۳	۱+۲ = ۳	۳+۴ =۷	۳	۵
۴	۶+ ۲ = ۸	۳+۴ =۷	۷	۶

سیاست بهینه سطر اول رفتن به گره ۵ است چون بر اساس ستون قبلی مشاهده گردید که هزینه کمتری در بر دارد.

از گره ۳ نیز به ۵ برویم بهتر است.

از گره ۴ هم به گره ۶ برویم بهتر است.

کمترین مقدار محاسبه شده برای سیاست بهینه مربوط به سطر اول، در ستون اول است (۷ > ۶)، یعنی رفتن از گره ۲ به گره ۵، نسبت به رفتن به گره ۶ کم‌هزینه‌تر است و هزینه‌ای معادل ۶ را در بر دارد.
برای سطرهای دوم و سوم نیز به همین صورت عمل می‌کنیم.

برای سطر اول با توجه به این که فقط یک مقصد وجود دارد (مقصد۷) در نتیجه برای تعیین ارزش سیاست بهینه هیچ انتخابی وجود ندارد همان ارزش محاسبه شده در ستون قبل را می‌نویسیم (برای سطر دوم هم همین طور)

یکی از متغیرهای تصمیم در این مرحله گره ۵ است، هزینه‌های محاسبه شده درون ستون از طریق تابع برگشتی بالای آن محاسبه گردیده است.

بعنوان مثال هزینه‌ی سطر اول: ۶ = ۲ + ۴

عدد ۴ هزینه‌ی (فاصله) رفتن از خانه‌ی ۲ به ۵ است. عدد ۲ نیز برابر با کمترین فاصله از گره ۵ تا مقصد است که از سطر اول ستون f^* جدول قبل (مرحله ۳) بدست آمده است.

وضعیت در این مرحله گره‌های ۴،۳،۲ هستند.

توضیح تابع برگشتی: تابع برگشتی این مسأله به صورت زیر است:

ارزش سیاست بهینه مرحله بعدی + ارزش جاری = تابع برگشت

$$f_n(s,x_n) = c(s,x_n) + f_{n+1}^*(x_n)$$

$f_n(s,x_n)$ یعنی مجموع کل مسافت (بین محل فعلی s در مرحله n و مقصد نهایی)

$c(s,x_n)$ یعنی هزینه‌ی (مسافت) وضعیت فعلی (S) تا گرهی که به آن می رویم (متغیر تصمیم $= x_n$)

$f_{n+1}^*(x_n)$ یعنی حداقل مسافت از x_n تا مقصد نهایی (در مرحله بعد)

مرحله ۱)

S \ $x_۳$	$f_۱(s,x_۱)=C(s,x_۱)+f_۳^*(x\ )$			$f_۱^*$	$x_۱^*$
	۲	۳	۴		
۱	۲+ ۶ = ۸	۱+ ۳ = ۴	۴ + ۷=۱۱	۴	۳

وضعیت در این مرحله گره ۱ است.

یکی از متغیرهای تصمیم در این مرحله گره ۲ است.

هزینه‌ی رفتن از گره ۱ به گره ۲ برابر با۲ است و عدد ۶ نیز برابر با کمترین فاصله از گره ۲ تا مقصد است که از جدول قبل برداشته شده

حل به پایان رسیده است. برای بدست آوردن جواب نهایی مسأله از مرحله ۱ شروع می‌کنیم. بهترین تصمیم در مرحله اول گره ۳ است.

پس داریم: $1 \rightarrow 3$

به جدول مرحله دوم مراجعه می‌کنیم، بهترین تصمیم مربوط به گره ۳ (حالت ۳)، رفتن به گره ۵ است.

در نتیجه: $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5$

به جدول مرحله سوم مراجعه می‌کنیم، بهترین تصمیم مربوط به گره ۵ (حالت ۵)، رفتن به گره ۷ است.

در نتیجه: $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 7$

مسیر فوق کوتاه‌ترین مسیر در شبکه ارائه شده است و هزینه‌ای معادل ۴ در بر دارد.

۳۷- برنامه‌ریزی آرمانی (GP)

در این بخش یک مثال از برنامه‌ریزی آرمانی به همراه مدل‌سازی و حل آن ارائه می‌شود، ارائه‌ی مسأله و مدلسازی آن بیشتر با هدف درک متغیرهای مدل صورت پذیرفته است.

مثال)

شرکتی لیوان و کاسه چینی تولید می‌کند. برای تولید این محصولات تنها از منابع خاک مخصوص و نیروی کار بهره می‌برد. بخشی از اطلاعات در جدول ارائه شده‌اند.

	نیروی کار موردنیاز (ساعت)	خاک مخصوص	سود بر واحد
کاسه	۱	۴	۴۰
لیوان	۲	۳	۵۰

این شرکت روزانه ۴۰ ساعت نیروی کار و ۱۲۰ کیلوگرم خاک مخصوص در اختیار دارد.

*تا این بخش مسأله، با یک مدل LP روبرو هستیم و در صورتی که هدف ما حداکثر سازی سود باشد، مدلی به شکل زیر خواهیم داشت:

$$\text{Max } Z = ۴۰x_۱ + ۵۰x_۲$$

$$st: \begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ \le ۴۰ \\ ۴x_۱ + ۳x_۲ \le ۱۲۰ \end{cases}$$

$$x_۱, x_۲ \ge ۰$$

$x_۱$: میزان تولید کاسه

$x_۲$: میزان تولید لیوان

این شرکت درصدد است اهداف (آرمانهای) زیر را برآورد سازد.

۱ - شرکت نمی‌خواهد کمتر از ۴۰ ساعت نیروی کار را مورد استفاده قرار دهد.

۲ - شرکت می‌خواهد روزانه حداقل سودی معادل با ۱۶۰۰ واحد بدست آورد.

۳ - بواسطه محدودیت انبار، شرکت نمی‌خواهد روزانه بیش از ۱۲۰ کیلوگرم خاک مخصوص را مورد استفاده قرار دهد.

۴ - شرکت می‌خواهد زمان اضافه کاری را به حداقل ممکن برساند.

مدلسازی

آرمان اول

برای آرمان اول محدودیتی بصورت زیر نوشته می‌شود

$$x_1 + 2x_2 + d_1^- - d_1^+ = 40$$

متغیرهای d_1^- و d_1^+ متغیرهای انحراف نامیده می‌شوند.[1] d_1^- نشان‌دهنده‌ی تعداد ساعات کاری کمتر از ۴۰ واحد و d_1^+ نشان دهنده‌ی تعداد ساعات کاری بیش از ۴۰ واحد است.

مثال: فرض کنید $x_2 = 5$ و $x_1 = 20$ است، در این صورت مقدار d_1^+ صفر خواهد بود و $d_1^- = 10$ است. مقادیر d_1^- و d_1^+ طوری تعیین می‌شود که معادله برقرار باشد)

با توجه به اینکه در آرمان اول گفته شد نمی‌خواهیم ساعت کاری از ۴۰ ساعت کمتر باشد، از اینرو d_1^- (که نشان‌دهنده‌ی تعداد ساعات کاری کمتر از ۴۰ ساعت است) انحراف نامطلوب این آرمان می‌باشد.

آرمان دوم:

برای آرمان دوم محدودیتی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$40x_1 + 50x_2 + d_2^- - d_2^+ = 1600$$

در این معادله d_2^- بیانگر مقدار سود کمتر از ۱۶۰۰ واحد است و d_2^+ بیانگر سود بالاتر از ۱۶۰۰ واحد.

فرض کنید تولید x_1 و x_2 به ترتیب ۱۰ و ۲۰ واحد است،

در اینصورت سودی معادل ۱۴۰۰ = (۲۰)۵۰ + (۱۰)۴۰ واحد خواهیم داشت، برای برقرار بودن معادله داریم:

$$\left(40(10) + 50(20)\right) + d_2^- - d_2^+ = 1600 \Rightarrow d_2^- = 200$$

با توجه به این که آرمان دوم خواهان حداقل سودی معادل ۱۶۰۰ واحد است، در نتیجه در این معادله d_2^- نامطلوب است (و در پی حداقل سازی آن خواهیم بود)

[1] برای هر محدودیتی که برای آرمانها نوشته می‌شوند، عبارت $d_i^- - d_i^+$ در سمت چپ نامعادله وارد شده و آنرا تبدیل به معادله می‌کند. همانند معادلات آرمانهای این مثال.

آرمان سوم

معادله مربوطه به این آرمان:

$$۴x_۱ + ۳x_۲ + d_۳^- - d_۳^+ = ۱۲۰$$

$d_۳^-$ مقدار مصرف خاک کمتر از ۱۲۰واحد

$d_۳^+$ مقدار مصرف خاک بیشتر از ۱۲۰ واحد

با توجه به آرمان سوم $d_۳^+$ نامطلوب است، زیرا نمی‌خواهیم مصرف خاک روزانه بیش از ۱۲۰ واحد باشد.

آرمان چهارم

معادله‌ی این آرمان همان معادله‌ی مربوط به آرمان اول است، در آرمان اول به منظور جلوگیری از ظرفیت بیکار خواستیم کمتر از ۴۰ ساعت نیروی کار مورداستفاده قرار نگیرد، در آرمان چهارم می خواهیم زمان اضافه کاری را به حداقل برسانیم. برای هر دو آرمان می‌توان از متغیرهای انحراف آرمان اول استفاده کرد، با این تفاوت که در آرمان اول $d_۱^-$ نامطلوب بود و در آرمان چهارم $d_۱^+$ نامطلوب است.

تابع هدف

تابع هدف یک برنامه‌ریزی آرمانی، حداقل سازی مجموع حاصلضرب اولویت‌ها در انحراف‌های نامطلوب است یعنی:

$$\text{Min } z = P_۱ d_۱^- + P_۲ d_۲^- + P_۳ d_۳^+ + P_۴ d_۱^+$$

مربوط به آرمان اول

مربوط به آرمان دوم

مربوط به آرمان سوم

مربوط به آرمان چهارم

در این مدل محدودیت سیستمی محدود به بزرگتر مساوی صفر بودن متغیرهای تصمیم است.

مدل بصورت کلی به شکل زیر است:

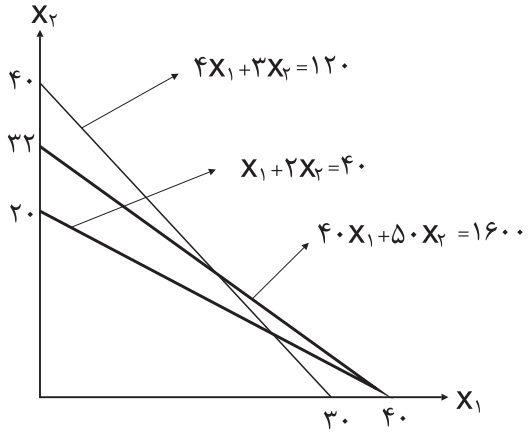
$$\text{Min } z = P_۱d_۱^- + P_۲d_۲^- + P_۳d_۳^+ + P_۴d_۱^+$$

$$\begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ + d_۱^- - d_۱^{+} = ۴۰ \\ ۴۰x_۱ + ۵۰x_۲ + d_۲^- - d_۳^+ = ۱۶۰۰ \\ ۴x_۱ + ۳x_۲ + d_۳^- - d_۳^+ = ۱۲۰ \end{cases}$$

$$x_1, x_2, d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+, d_3^-, d_3^+ \geq 0$$

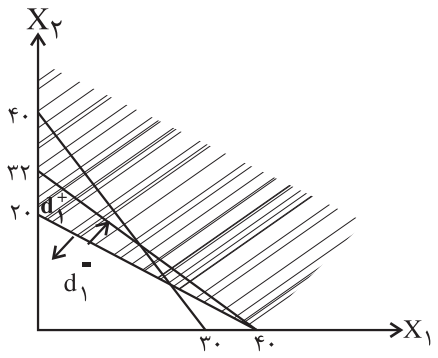
حل از طریق روش ترسیمی

ابتدا تمامی انحراف‌ها را صفر در نظر گرفته و محدودیت‌ها را رسم می‌کنیم:



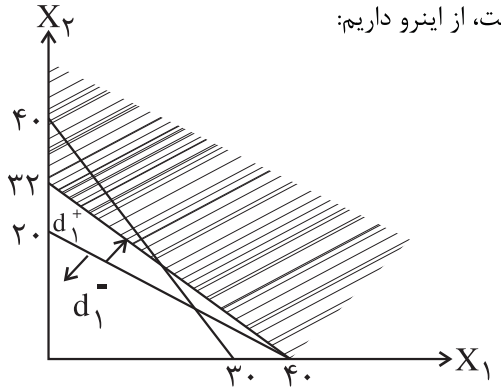
منطق حل مدل برنامه‌ریزی آرمانی بصورت تلاش برای تحقق آرمانها با درنظر گرفتن اولویت آنهاست. در هر مسئله‌ای مهمترین آرمان، همان آرمان اول است و ابتدا باید آن آرمان تحقق یابد، پس از تحقق آرمان اول به سراغ دوم می‌رویم و ..... ممکن است امکان تحقق همه‌ی آرمانها وجود نداشته باشد، به هر حال با توجه به اولویت آرمانها به پیش می‌رویم و در حد امکان آنها را محقق می‌سازیم.

در اولین اولویت، حداقل کردن d_1^- مدنظر است ($P_1 d_1$) که شکل آن بصورت زیر خواهد بود:



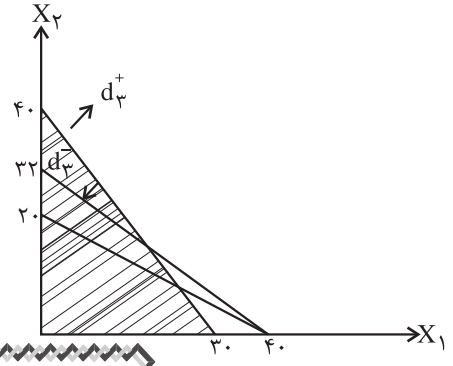
d_1^- مربوط به منطقه‌ای است که عدد سمت راست از حالت فعلی کوچکتر شود، از اینرو سطح زیر این خط مربوط به d_1^- و سطح بالای آن مربوط به d_1^+ است. همانطور که گفته شد، در این آرمان d_1^- برای ما نامطلوب است از این جهت بخش بالای خط مربوط به این معادله، منطقه موجه مربوط به آرمان اول را نشان می‌دهد. دقت داشته باشید که در تمامی نقاط فضای هاشور خورده، آرمان اول محقق شده است و تا این مرحله از حل، انتخاب نقاط مختلف در منطقه موجه تفاوتی با هم ندارد، حال به سراغ آرمان دوم می‌رویم:

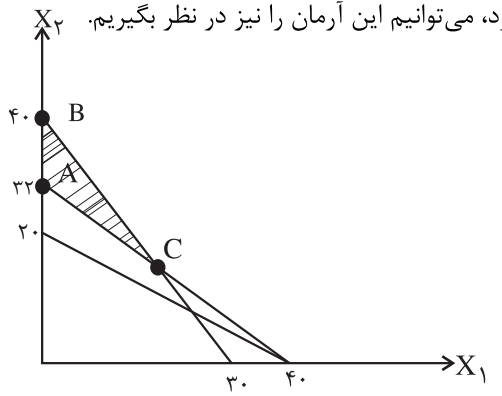
در آرمان دوم حداقل کردن d_2^- مدنظر است، از اینرو داریم:



این منطقه هیچ مشکلی را برای اولویت اول ایجاد نمی‌کند، از اینرو تا این مرحله از حل، منطقه موجه فوق، برای آرمان اول و دوم در نظر گرفته می‌شود (چون در درجه اول این منطقه در منطقه‌ی مربوط به اولویت اول قرار دارد و پس از آن، این منطقه برای اولویت دوم هم صادق است)

حال به سراغ آرمان سوم می‌رویم، با توجه به اینکه در آرمان سوم در پی حداقل سازی d_3^+ هستیم، فضای مربوط به پائین این خط در منطقه موجه قرار دارد، از آنجائی که هنوز هم فضای مشترکی بین منطقه موجه این آرمان و منطقه موجه آرمان اول و دوم وجود دارد، می‌توانیم این آرمان را نیز در نظر بگیریم.





در نهایت ، به سراغ آرمان چهارم می‌رویم، آرمان چهارم حداقل سازی d_1^+ است. منطقه موجه این آرمان، اشتراکی با منطقه موجه آرمانهای قبل ندارد، از اینرو منطقه موجه قبلی را تغییری نداده و از بین نقاط موجه آن، نقطه ای را انتخاب می کنیم که به تحقق این آرمان نزدیکتر باشد. بین سه نقطه‌ی A,B,C ، در صورت انتخاب نقطه‌ی C، d_1^+ به مقدار حداقل خود می‌رسد، زیرا این نقطه بیش از دو نقطه دیگر به محدودیت اول نزدیک است.

جواب نهایی:

$x_1 = 15$

$x_2 = 120$

$d_1^+ = 15$